Höhere Technische Mechanik

Teil 1

Klausur vom 15. März 2001
Fachbereich 04, Prof. Dr.-Ing. C. Eller

Name :	**Matr.- Nr. :**

Hinweise:

Der Lösungsweg ist notwendiger Bestandteil der Klausurbearbeitung und muß daher mit abgegeben werden.
Die Angabe von Ergebnissen ohne erkennbaren Lösungsweg wird nicht als Lösung anerkannt, auch wenn die Ergebnisse richtig sind. Alle beigefügten losen Blätter sind mit dem Namen und der Matrikelnummer zu versehen.

Aufgabe	1	2	Gesamt
Punkte	13	14	27
erreicht			

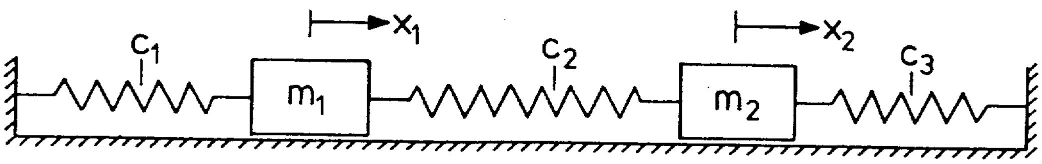
Aufgabe 1

Die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die zugehörigen Eigenschwingungsformen $\underline{x}_i$ eines elastischen Systems ergeben sich aus der Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems

$$(\underline{C} - \omega^2 \cdot \underline{M}) \cdot \underline{x} = \underline{0},$$

wobei $\underline{C}$ die Steifigkeitsmatrix und $\underline{M}$ die Massenmatrix ist.

Für den dargestellten Zweimassenschwinger bestimme man die Eigenkreisfrequenzen ω_1 und ω_2 sowie die zugehörigen Eigenschwingungsvektoren $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$ durch analytische Lösung des obenstehenden Eigenwertproblems.



Gegeben: $m_1 = 5$ kg ; $m_2 = 3$ kg

$c_1 = 200$ N/m ; $c_2 = 100$ N/m ; $c_3 = 300$ N/m

Die Massenmatrix $\underline{M}$ und die Steifigkeitsmatrix $\underline{C}$ für das dargestellte System lauten:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

1) Eigenkreisfrequenzen

$$\det\left(\underline{C} - \omega^2 \cdot \underline{M}\right) = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 300 & -100 \\ -100 & 400 \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 300 - 5\cdot\omega^2 & -100 \\ -100 & 400 - 3\cdot\omega^2 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$(300 - 5\cdot\omega^2)\cdot(400 - 3\cdot\omega^2) - 10000 = 0$$

$$120000 - 900\cdot\omega^2 - 2000\cdot\omega^2 + 15\cdot\omega^4 - 10000 = 0$$

$$15\cdot\omega^4 - 2900\cdot\omega^2 + 110000 = 0$$

$$\omega^4 - 193,\overline{3}\cdot\omega^2 + 7333,\overline{3} = 0$$

$$\lambda^2 - 193,3\cdot\lambda + 7333,\overline{3} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = 96,\overline{6} \pm \sqrt{9344,\overline{4} - 7333,\overline{3}}$$

$$\lambda_1 = 96,\overline{6} - 44,845 = 51,822 \Rightarrow \omega_1 = 7,20\,s^{-1}$$

$$\lambda_2 = 96,\overline{6} + 44,845 = 141,511 \Rightarrow \omega_2 = 11,90\,s^{-1}$$

2) Eigenvektoren

a) 1. Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 300 - 5\cdot 51,822 & -100 \\ -100 & 400 - 3\cdot 51,822 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 40,89 & -100 \\ -100 & 244,53 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obere Gleichung: $40,89\cdot x_{11} - 100\cdot x_{12} = 0 \Rightarrow x_{11} = 2,445\cdot x_{12}$

untere Gleichung: $-100\cdot x_{11} + 244,53\cdot x_{12} = 0 \Rightarrow x_{11} = 2,445\cdot x_{12}$

gewählt: $x_{12} = 1$

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 2,445 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) 2. Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 300 - 5 \cdot 141{,}511 & -100 \\ -100 & 400 - 3 \cdot 141{,}511 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -407{,}56 & -100 \\ -100 & -24{,}53 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obere Gleichung: $-407{,}56 \cdot x_{21} - 100 \cdot x_{22} = 0 \Rightarrow x_{22} = -4{,}076 \cdot x_{21}$

untere Gleichung: $-100 \cdot x_{21} - 24{,}53 \cdot x_{22} = 0 \Rightarrow x_{22} = -4{,}076 \cdot x_{21}$

gewählt: $x_{21} = 1$

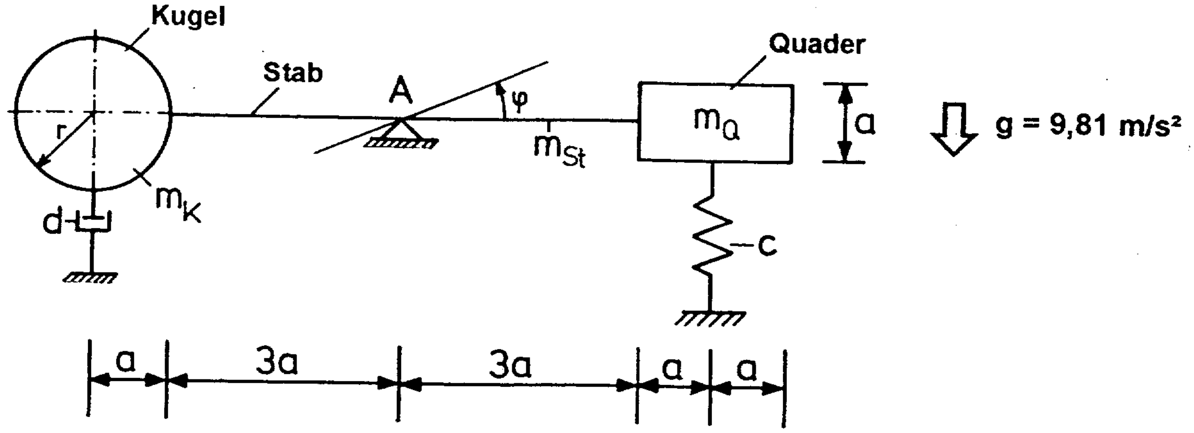
$$\underline{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4{,}076 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

Für das dargestellte Schwingungssystem ermittle man:

1) die nichtlineare Bewegungsgleichung,

2) die linearisierte Bewegungsgleichung für kleine Ausschläge φ und kleine Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$.

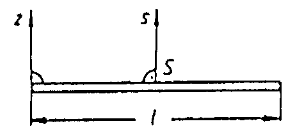


Gegeben: Federsteifigkeit c ; Dämpferkonstante d ; Stabmasse m_{St} ; Kugelmasse m_K Kugelradius $r = a$; Quadermasse m_Q

Die Massenträgheitsmomente in Bezug auf die körpereigenen Schwerachsen können der Tabelle auf der folgenden Seite entnommen werden.

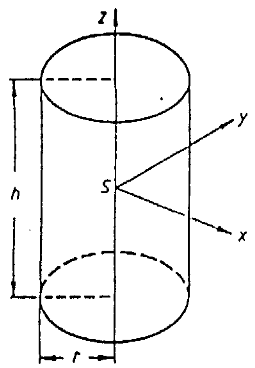
Das Schrägstellen von Feder und Dämpfer kann vernachlässigt werden.

Massenträgheitsmomente homogener Körper



Dünner Stab

$$J_z = \frac{m}{3} l^2\,; \quad J_s = \frac{m}{12} l^2$$

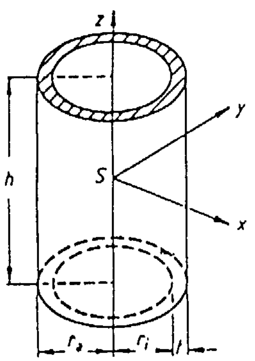


Zylinder

$$m = \pi \varrho r^2 h$$

$$J_z = \frac{m}{2} r^2$$

$$J_x = J_y = \frac{m}{4}\left(r^2 + \frac{1}{3}h^2\right)$$



Hohlzylinder

$$m = \pi \varrho (r_a^2 - r_i^2) h$$

$$J_z = \frac{m}{2}(r_a^2 + r_i^2)$$

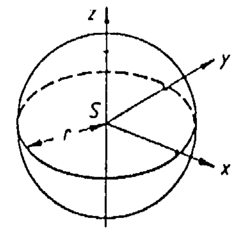
$$J_x = J_y = \frac{m}{4}\left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3}h^2\right)$$

Dünnwandiger Hohlzylinder

$$r = \frac{1}{2}(r_a + r_i)\,; \quad t = r_a - r_i$$

$$m = 2\pi \varrho r h t$$

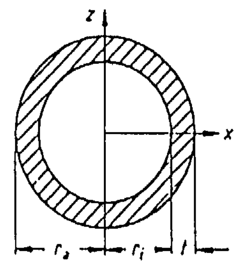
$$J_z = m r^2\,; \quad J_x = J_y = \frac{m}{2}\left(r^2 + \frac{1}{6}h^2\right)$$



Kugel

$$m = \frac{4}{3}\pi \varrho r^3$$

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m r^2$$



Hohlkugel

$$m = \frac{4}{3}\pi \varrho (r_a^3 - r_i^3)$$

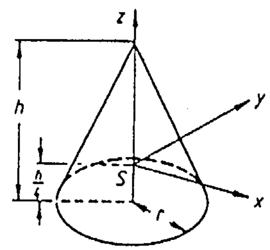
$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m \frac{r_a^5 - r_i^5}{r_a^3 - r_i^3}$$

Dünnwandige Hohlkugel

$$r = \frac{1}{2}(r_a + r_i)\,; \quad t = r_a - r_i$$

$$m = 4\pi \varrho r^2 t$$

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} m r^2$$

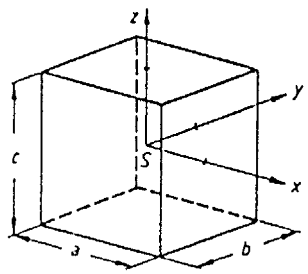


Gerader Kreiskegel

$$m = \frac{\pi}{3}\varrho r^2 h$$

$$J_z = \frac{3}{10} m r^2$$

$$J_x = J_y = \frac{3}{20} m \left(r^2 + \frac{1}{4}h^2\right)$$



Quader

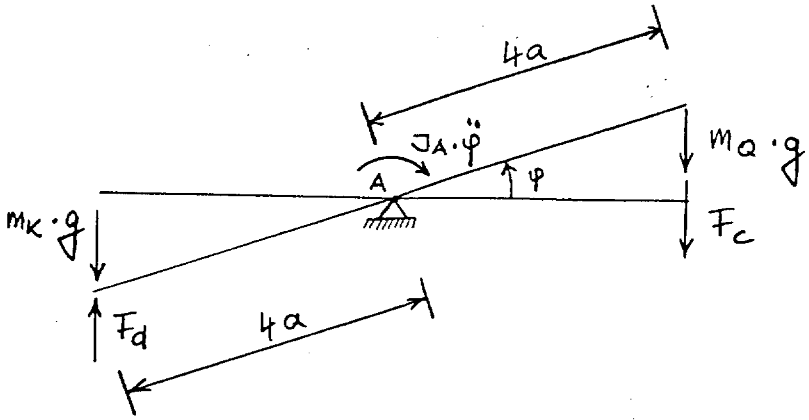
$$m = \varrho a b c$$

$$J_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

$$J_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$

$$J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

1) Nichtlineare Bewegungsgleichung



$$J_A = \frac{m_{St}}{12} \cdot (6 \cdot a)^2 + \frac{2}{5} \cdot m_K \cdot a^2 + m_K \cdot (4 \cdot a)^2 + \frac{m_Q}{12} \cdot (4a^2 + a^2) + m_Q \cdot (4a)^2$$

$$J_A = 3 \cdot m_{St} \cdot a^2 + \frac{2}{5} \cdot m_K \cdot a^2 + 16 \cdot m_K \cdot a^2 + \frac{5}{12} m_Q \cdot a^2 + 16 \cdot m_Q \cdot a^2$$

$$J_A = \left(3 \cdot m_{St} + \frac{82}{5} \cdot m_K + \frac{197}{12} \cdot m_Q\right) \cdot a^2$$

$$F_c = c \cdot 4 \cdot a \cdot \sin\varphi = 4 \cdot c \cdot a \cdot \sin\varphi$$

$$F_d = d \cdot \frac{d}{dt}(4 \cdot a \cdot \sin\varphi) = d \cdot 4 \cdot a \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi = 4 \cdot d \cdot a \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi$$

$\underline{\sum M_{iA} = 0}$

$$-J_A \cdot \ddot{\varphi} - F_c \cdot 4a \cdot \cos\varphi - F_d \cdot 4a \cdot \cos\varphi - m_Q \cdot g \cdot 4a \cdot \cos\varphi$$
$$+ m_K \cdot g \cdot 4a \cdot \cos\varphi = 0$$

$$J_A \cdot \ddot{\varphi} + 16 \cdot c \cdot a^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + 16 \cdot d \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos^2\varphi$$
$$+ m_Q \cdot g \cdot 4a \cdot \cos\varphi - m_K \cdot g \cdot 4a \cdot \cos\varphi = 0$$

Nichtlineare Dgl.:

$$\left(3 \cdot m_{St} + \frac{82}{5} \cdot m_K + \frac{197}{12} \cdot m_Q\right) \cdot a^2 \cdot \ddot{\varphi} + 16 \cdot c \cdot a^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$
$$+ 16 \cdot d \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos^2\varphi + m_Q \cdot g \cdot 4a \cdot \cos\varphi - m_K \cdot g \cdot 4a \cdot \cos\varphi = 0$$

2) Linearisierte Bewegungsgleichung

$$J_A \cdot \ddot{\varphi} + f(\dot{\varphi}, \varphi) = 0$$

$$f(\dot{\varphi}, \varphi) = 16 \cdot c \cdot a^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + 16 \cdot d \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos^2\varphi$$
$$+ 4 \cdot m_Q \cdot g \cdot a \cdot \cos\varphi - 4 \cdot m_K \cdot g \cdot a \cdot \cos\varphi$$

$$f(\dot{\varphi},\varphi) \approx f(0,0) + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}}\right|_{\substack{\dot{\varphi}=0\\ \varphi=0}} \cdot \dot{\varphi} + \left.\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right|_{\substack{\dot{\varphi}=0\\ \varphi=0}} \cdot \varphi$$

$$f(0,0) = 4 \cdot m_Q \cdot g \cdot a - 4 \cdot m_K \cdot g \cdot a = 4 \cdot (m_Q - m_K) \cdot g \cdot a$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}}\right|_{\substack{\dot{\varphi}=0\\ \varphi=0}} = 16 \cdot d \cdot a^2 \cdot \cos^2\varphi \Big|_{\substack{\dot{\varphi}=0\\ \varphi=0}} = 16 \cdot d \cdot a^2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right|_{\substack{\dot{\varphi}=0\\ \varphi=0}} = \Big[16 \cdot c \cdot a^2 \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 16 \cdot d \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot 2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$
$$- 4\, m_Q \cdot g \cdot a \cdot \sin\varphi + 4 \cdot m_K \cdot g \cdot a \cdot \sin\varphi \Big]_{\substack{\dot{\varphi}=0\\ \varphi=0}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right|_{\substack{\dot{\varphi}=0\\ \varphi=0}} = 16 \cdot c \cdot a^2$$

<u>Linearisierte Dgl.</u>

$$\left(3 \cdot m_{St} + \frac{82}{5} \cdot m_K + \frac{197}{12}\, m_Q\right) \cdot a^2 \cdot \ddot{\varphi} + 16 \cdot d \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi} + 16 \cdot c \cdot a^2 \cdot \varphi$$
$$= 4 \cdot (m_K - m_Q) \cdot g \cdot a$$