Höhere Technische Mechanik

Teil 2

Klausur vom 24. September 1998

Fachbereich 04, Prof. Dr.-Ing. C. Eller

Name :	**Matr.- Nr. :**

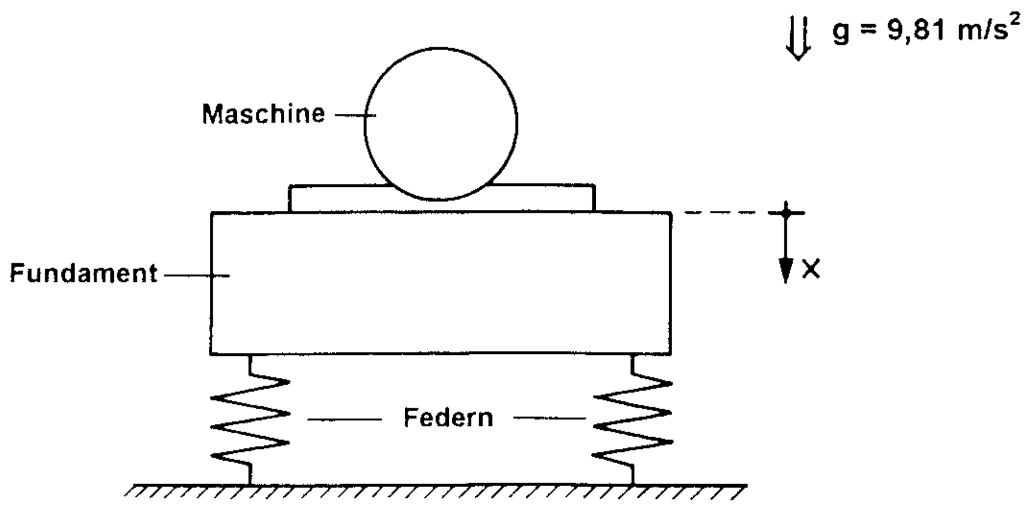
Hinweise:

Der Lösungsweg ist notwendiger Bestandteil der Klausurbearbeitung und muß daher mit abgegeben werden.
Die Angabe von Ergebnissen ohne erkennbaren Lösungsweg wird nicht als Lösung anerkannt, auch wenn die Ergebnisse richtig sind. Alle beigefügten losen Blätter sind mit dem Namen und der Matrikelnummer zu versehen.

Aufgabe	1	2	Gesamt
Punkte	10	20	30
erreicht			

Aufgabe 1

Eine Fertigungsmaschine ist auf 4 Federn mit der Gesamtsteifigkeit $c = 4 \cdot c_F = 9500$ N/cm aufgelagert. Der Rotor der Maschine, der mit einer Drehzahl $n = 2200\ \text{min}^{-1}$ gleichförmig umläuft, besitzt eine Unwucht $m_u \cdot r_u = 0{,}25$ kg·m. Die statische Zusammendrückung der Federn infolge des Eigengewichtes von Maschine und Fundament beträgt $w = 1$ cm.



1) Ermitteln Sie die Kennkreisfrequenz des Schwingungssystems.

2) Berechnen Sie die Gesamtmasse von Maschine und Fundament.

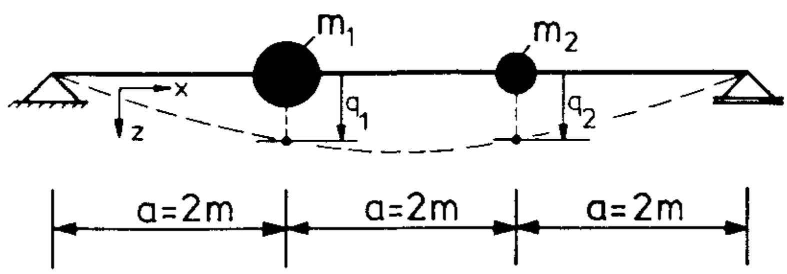
3) Bestimmen Sie die Durchlässigkeit V_D sowie die Amplitude $\hat{F}_B$ der auf den Boden übertragenen Kraft.

4) Geben Sie die Amplitude $\hat{x}$ der Fundamentschwingung an.

(Dämpfungseinflüsse können vernachlässigt werden.)

Aufgabe 2

Der dargestellte Balken wird in den Drittelspunkten durch die Massen $m_1 = 100$ kg und $m_2 = 50$ kg beansprucht. Der Träger soll als IPB 120 ($I_y = 864 cm^4$) in der Stahlgüte St37 ($E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm²) ausgeführt werden.



Die Eigenschwingungen um die statische Ruhelage werden durch die Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} 8 \cdot m_1 & 7 \cdot m_2 \\ 7 \cdot m_1 & 8 \cdot m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \frac{E \cdot I_y}{a^3} \cdot \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{q}} + \underline{C} \cdot \underline{q} = \underline{0}$$

beschrieben.

1) Ermitteln Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_1 und ω_2 .

2) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$.

3) Stellen Sie die Eigenvektoren graphisch dar.

4) Skalieren Sie die Eigenvektoren so, daß

$$\underline{x}_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x}_i = 1 \;; \quad (i = 1,2)$$

wird.

5) Bilden Sie die Modalmatrix $\underline{\Phi}$ der skalierten Eigenvektoren.

(Die Trägermasse kann vernachlässigt werden)

Kennkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} = \sqrt{\frac{9.81\ \frac{m}{s^2}}{0{,}01\ m}} = 31{,}32\ s^{-1}$$

Gesamtmasse

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}$$

$$m = \frac{c}{\omega_0^2} = \frac{950\,000\ \frac{N}{m}}{(31{,}32\ s^{-1})^2} = 968{,}5\ Kg$$

Durchlässigkeit

$$V_D = \frac{\hat{F}_B}{\hat{F}} = \sqrt{\frac{1}{(1-\eta^2)^2}}$$

$$\Omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot 2200\ min^{-1}}{\frac{60 s}{min}} = 230{,}38\ s^{-1}$$

$$\hat{F} = m_u \cdot r_u \cdot \Omega^2 = 0{,}25\ Kg \cdot m \cdot (238{,}38\ s^{-1})^2$$

$$\hat{F} = 13268{,}74\ N$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{230{,}38\ s^{-1}}{31{,}32\ s^{-1}} = 7{,}356$$

$$V_D = \sqrt{\frac{1}{(1-7{,}356^2)^2}} = 0{,}0188$$

$$\hat{F}_B = V_D \cdot \hat{F} = 0{,}0188 \cdot 13268{,}74 N = 249{,}83\ N$$

Amplitude der Fundamentschwingung

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2}} \cdot \frac{\hat{F}}{c} = \frac{1}{\sqrt{(1-7{,}356^2)^2}} \cdot \frac{13268{,}74 N}{950000\ \frac{N}{m}}$$

$$\hat{x} = 0{,}000263 m \mathrel{\hat{=}} 0{,}263\ mm$$

1) Eigenkreisfrequenzen

$$\frac{18 \cdot E \cdot I_y}{a^3} = \frac{18 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} \cdot 864 \cdot 10^{-8} m^4}{(2m)^3} = 4082400 \frac{N}{m}$$

Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} 800\ kg & 350\ kg \\ 700\ kg & 400\ kg \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4082400 \frac{N}{m} & 0 \\ 0 & 4082400 \frac{N}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösen des Eigenwertproblems

$$\det \left[\begin{bmatrix} 4082400 & 0 \\ 0 & 4082400 \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 800 & 350 \\ 700 & 400 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \left[\begin{bmatrix} 4082400 - 800 \cdot \omega^2 & -350 \cdot \omega^2 \\ -700 \cdot \omega^2 & 4082400 - 400 \cdot \omega^2 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$(4082400 - 800 \cdot \omega^2) \cdot (4082400 - 400 \cdot \omega^2) - 245000 \cdot \omega^4 = 0$$

$$1{,}666598976 \cdot 10^{13} - 1632960000 \cdot \omega^2 - 3265920000 \cdot \omega^2 + 320000 \cdot \omega^4$$
$$- 245000\, \omega^4 = 0$$

$$75000 \cdot \omega^4 - 4898880000 \cdot \omega^2 + 1{,}666598976 \cdot 10^{13} = 0$$

$$\omega^4 - 65318{,}4 \cdot \omega^2 + 222213196{,}8 = 0$$

$$\omega_{1/2}^2 = 32659{,}2 \pm \sqrt{(32659{,}2)^2 - 222213196{,}8}$$

$$\omega_{1/2}^2 = 32659{,}2 \pm 29058{,}74$$

$$\omega_1^2 = 3600{,}46 \Rightarrow \omega_1 = 60{,}00 \frac{1}{s}$$

$$\omega_2^2 = 61717{,}94 \Rightarrow \omega_2 = 248{,}43 \frac{1}{s}$$

2) Eigenvektoren

(

1. Eigenvektor

$$\left[\begin{array}{c|c} 1202032 & -1260161 \\ \hline -2520322 & 2642216 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Gleichung: $1202032 \cdot x_{11} - 1260161 \cdot x_{12} = 0$

$x_{11} = 1.048 \cdot x_{12}$

2. Gleichung: $-2520322 \cdot x_{11} + 2642216 \cdot x_{12} = 0$

$x_{11} = 1,048 \cdot x_{12}$

gewählt: $x_{11} = 1 \Rightarrow x_{12} = 0,9542$

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9542 \end{bmatrix}$$

2. Eigenvektor

$$\left[\begin{array}{c|c} -45291952 & -21601279 \\ \hline -43202558 & -20604776 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Gleichung: $-45291952 \cdot x_{21} - 21601279 \cdot x_{22} = 0$

$x_{21} = -0,4769 \cdot x_{22}$

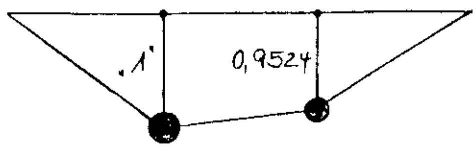
2. Gleichung: $-43202558 \cdot x_{21} - 20604776 \cdot x_{22} = 0$

$x_{21} = -0,4769 \cdot x_{22}$

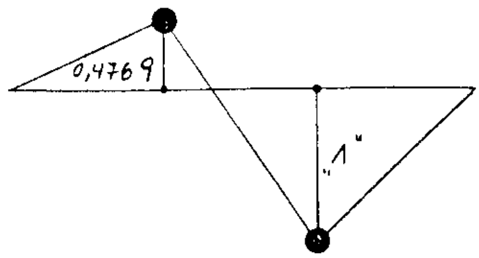
gewählt: $x_{22} = 1 \Rightarrow x_{21} = -0,4769$

$$\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} -0,4769 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) Darstellung der Eigenvektoren



1. Eigenvektor



2. Eigenvektor

4) Skalieren der Eigenvektoren

$$(C_1 \cdot \underline{x}_1)^T \cdot \underline{M} \cdot (C_1 \cdot \underline{x}_1) \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \sqrt{\frac{1}{\underline{x}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x}_1}}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 800 & 350 \\ \hline 700 & 400 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0,9542 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0,9542 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1467,94 & 731,68 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 2166,11 \end{array}\right] = \underline{x}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x}_1$$

$$(C_2 \cdot \underline{x}_2)^T \cdot \underline{M} \cdot (C_2 \cdot \underline{x}_2) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{\underline{x}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x}_2}}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 800 & 350 \\ \hline 700 & 400 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} -0,4769 \\ 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} -0,4769 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 318,48 & 233,09 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 81,21 \end{array}\right] = \underline{x}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x}_2$$

5) Modalmatrix ϕ der skalierten Eigenvektoren

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2166,11}} & \frac{-0,4769}{\sqrt{81,21}} \\ \frac{0,9542}{\sqrt{2166,11}} & \frac{1}{\sqrt{81,21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0215 & -0,0529 \\ 0,0205 & 0,1110 \end{bmatrix}$$