Höhere Technische Mechanik

Teil 1

Klausur vom 11. März 1999
Fachbereich 04, Prof. Dr.-Ing. C. Eller

Name :	**Matr.- Nr. :**

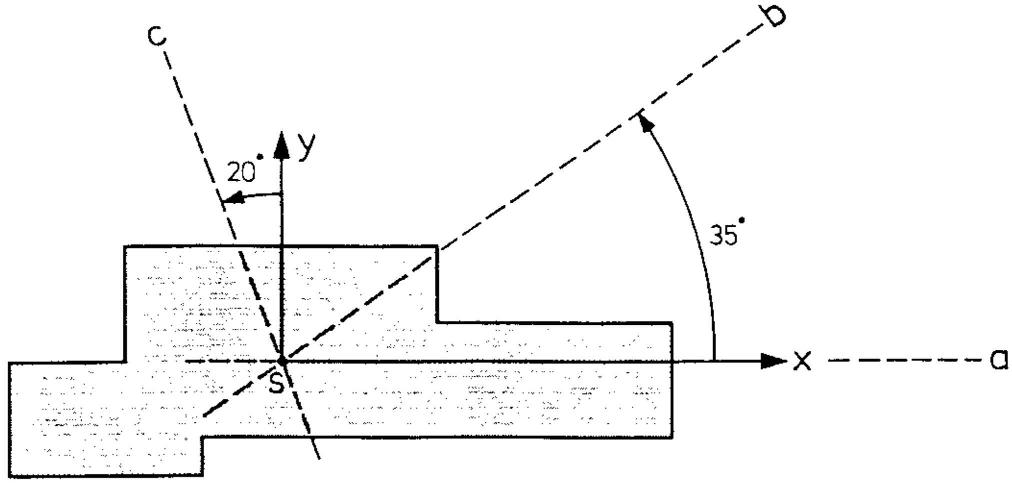
Hinweise:

Der Lösungsweg ist notwendiger Bestandteil der Klausurbearbeitung und muß daher mit abgegeben werden.
Die Angabe von Ergebnissen ohne erkennbaren Lösungsweg wird nicht als Lösung anerkannt, auch wenn die Ergebnisse richtig sind. Alle beigefügten losen Blätter sind mit dem Namen und der Matrikelnummer zu versehen.

Aufgabe	1	2	3	Gesamt
Punkte	14	9	7	30
erreicht				

Aufgabe 1

Für eine dynamische Berechnung soll der dargestellte Motor als starrer Körper betrachtet werden.



Für die Achsen a, b und c in der Symmetrieebene des Motors wurden die folgenden Massenträgheitsmomente durch Mehrfadenaufhängung bestimmt :

J_a = 150 kg·cm² ; J_b = 140 kg·cm² ; J_c = 180 kg·cm²

1) Bestimmen Sie die Massenträgheitsmomente J_x, J_y und J_{xy} in bezug auf die dargestellten Schwerachsen x und y.

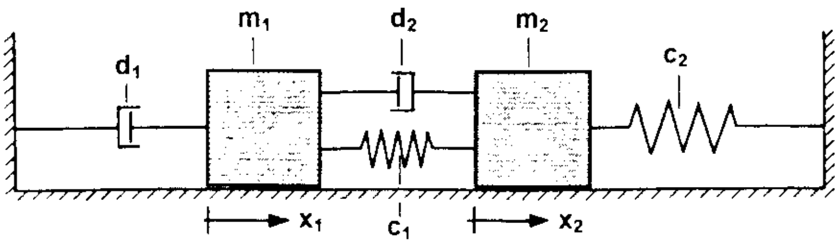
2) Ermitteln Sie die Hauptträgheitsachsen sowie die zugehörigen Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2. Tragen Sie die Hauptträgheitsachsen 1 und 2 in die obenstehende Skizze ein.

3) Stellen Sie die Trägheitsellipse maßstäblich dar.

Aufgabe 2

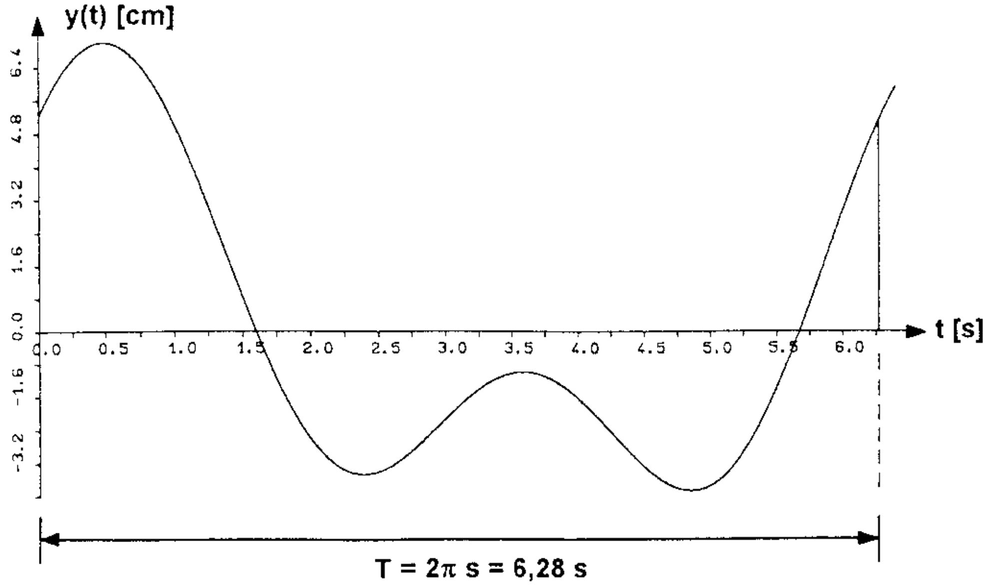
Für die dargestellte Schwingerkette ermittle man die matrizielle Bewegungsgleichung. Gleitreibungswiderstände können vernachlässigt werden.

Gegeben: $m_1 = 10\ \text{kg}$; $m_2 = 20\ \text{kg}$; $d_1 = 20\,\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$; $d_2 = 40\,\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$; $c_1 = 1500\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$; $c_2 = 2000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$

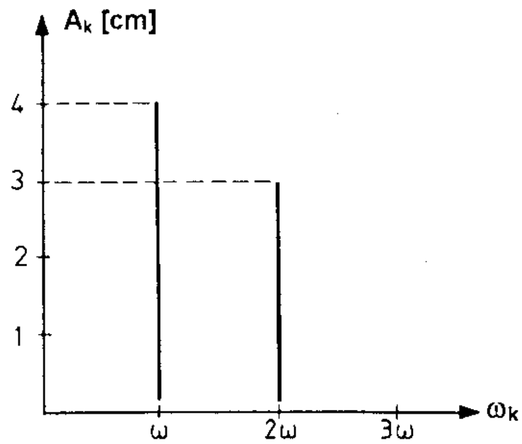


Aufgabe 3

Für die dargestellte periodische Schwingung wurde eine Fourieranalyse durchgeführt. Das Ergebnis der Untersuchung ist in den untenstehenden Spektren aufgetragen.

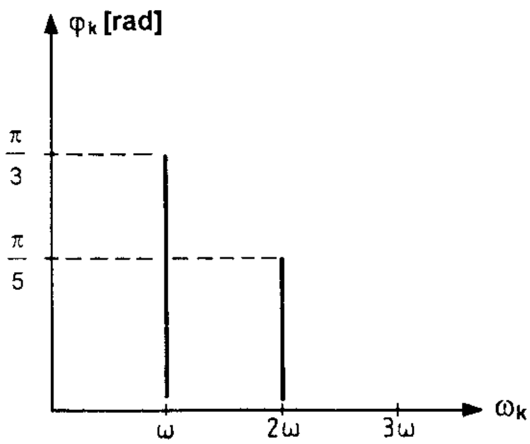


Amplitudenspektrum



$A_k = 0$ **für** $k > 2$

Phasenwinkelspektrum



$\varphi_k = 0$ **für** $k > 2$

1) Geben Sie die Funktionsgleichung y(t) der periodischen Schwingung an.

2) Stellen Sie das zugehörige Zeigerdiagramm zum Zeitpunkt t = 0 dar. Geben Sie die Länge und den Nullphasenwinkel des resultierenden Zeigers an.

Achse a: $\alpha_a = 0;\ \beta_a = 90°$

$\cos\alpha_a = 1;\ \cos^2\alpha_a = 1;\ \cos\beta_a = 0;\ \cos^2\beta_a = 0$

Achse b: $\alpha_b = 35°;\ \beta_b = 55°$

$\cos\alpha_b = 0{,}8191;\ \cos^2\alpha_b = 0{,}6710;\ \cos\beta_b = 0{,}5736;\ \cos^2\beta_b = 0{,}3290$

Achse c: $\alpha_c = 110°;\ \beta_c = 20°$

$\cos\alpha_c = -0{,}3420;\ \cos^2\alpha_c = 0{,}1170;\ \cos\beta_c = 0{,}9397;\ \cos^2\beta_c = 0{,}8830$

$$150\,\underline{kg}\cdot cm^2 = J_{xx}\cdot 1 + J_{\underline{yy}}\cdot 0 + 2\cdot J_{xy}\cdot 1\cdot 0 \qquad (1)$$

$$140\,\underline{kg}\cdot cm^2 = J_{xx}\cdot 0{,}6710 + J_{\underline{yy}}\cdot 0{,}3290 + 2\cdot J_{xy}\cdot 0{,}8191\cdot 0{,}5736 \qquad (2)$$

$$180\,\underline{kg}\cdot cm^2 = J_{xx}\cdot 0{,}1170 + J_{\underline{yy}}\cdot 0{,}8830 + 2\cdot J_{\underline{xy}}\cdot(-0{,}3420)\cdot 0{,}9397 \qquad (3)$$

aus (1): $J_{xx} = 150\,\underline{kg}\cdot cm^2$

aus (2): $140\,\underline{kg}\cdot cm^2 = 150\,\underline{kg}\cdot cm^2\cdot 0{,}6710 + J_{\underline{yy}}\cdot 0{,}3290 + J_{xy}\cdot 0{,}9397$

$$J_{\underline{yy}}\cdot 0{,}3290 + J_{xy}\cdot 0{,}9397 = 39{,}35\,\underline{kg}\cdot cm^2$$

$$J_{\underline{yy}} = 119{,}60\,\underline{kg}\cdot cm^2 - 2{,}856\cdot J_{xy}$$

einsetzen in (3)

$$180\,\underline{kg}\cdot cm^2 = 150\,\underline{kg}\cdot cm^2\cdot 0{,}1170 + 105{,}61\,\underline{kg}\cdot cm^2 - 2{,}522\cdot J_{xy} - 0{,}6428\cdot J_{xy}$$

$$3{,}1648\cdot J_{xy} = -56{,}84\,\underline{kg}\cdot cm^2$$

$$J_{xy} = -17{,}96\,\underline{kg}\cdot cm^2$$

$$J_{yy} = 119{,}60\,\underline{kg}\cdot cm^2 - 2{,}856\cdot(-17{,}96\,\underline{kg}\cdot cm^2)$$

$$J_{\underline{yy}} = 170{,}89\,\underline{kg}\cdot cm^2$$

$$\tan 2\bar{\alpha} = -\frac{2\cdot J_{xy}}{(J_{\underline{yy}} - J_{xx})} = -\frac{2\cdot(-17{,}96\,\underline{kg}\cdot cm^2)}{(170{,}89\,\underline{kg}\cdot cm^2 - 150\,\underline{kg}\cdot cm^2)} = 1{,}7195$$

$$2\bar{\alpha} = 59{,}80°$$

$$\bar{\alpha} = 29{,}90°$$

Hauptflächenmomente

$$\left.\begin{matrix}J_1\\J_2\end{matrix}\right\} = \frac{(170{,}89 + 150)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(170{,}89-150)^2 + 4\cdot(-17{,}96)^2}$$

$$J_1 = 160{,}45 + 20{,}78 = 181{,}23 \ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{cm}^2$$

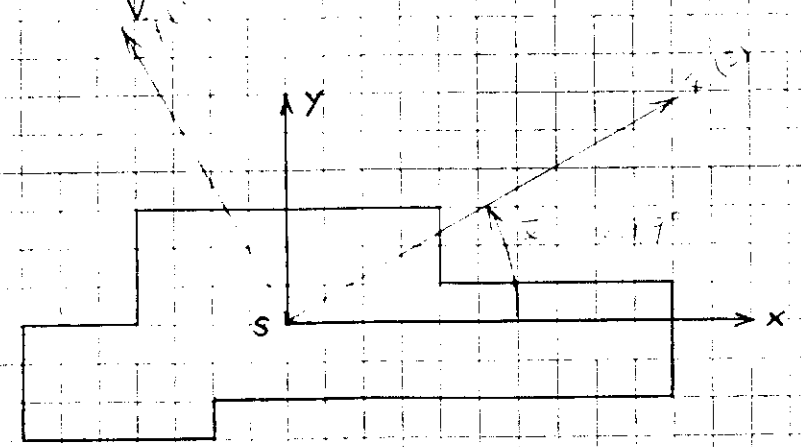
$$J_2 = 160{,}45 - 20{,}78 = 139{,}67 \ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{cm}^2$$

Lage der 1 - Achse

$$J_{\bar{x}\bar{x}} = J_{xx}\cdot\cos^2\bar{\alpha} + J_{yy}\cdot\sin^2\bar{\alpha} + 2\cdot J_{xy}\cdot\sin\bar{\alpha}\cdot\cos\bar{\alpha}$$

$$J_{\bar{x}\bar{x}} = 150\cdot\cos^2 29{,}90^\circ + 170{,}89\cdot\sin^2 29{,}90^\circ + 2\cdot(-17{,}96)\cdot\sin 29{,}9^\circ\cdot\cos 29{,}$$

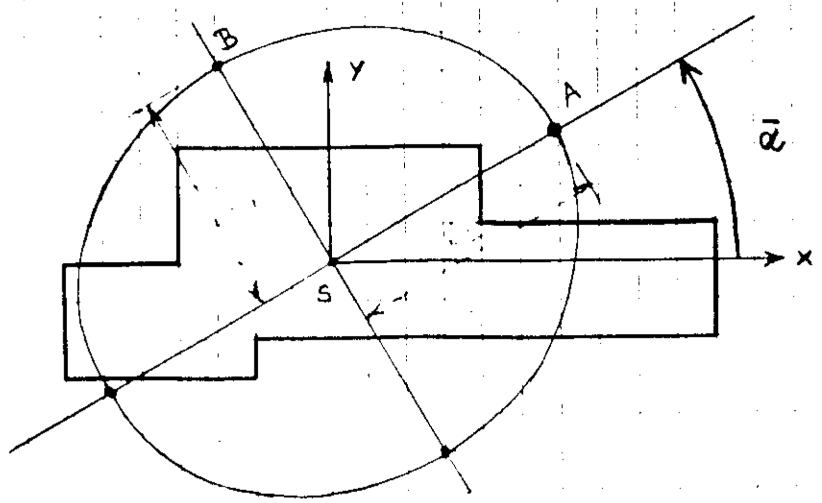
$$J_{\bar{x}\bar{x}} = 139{,}67 \ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{cm}^2 = J_2$$



Trägheitsellipse

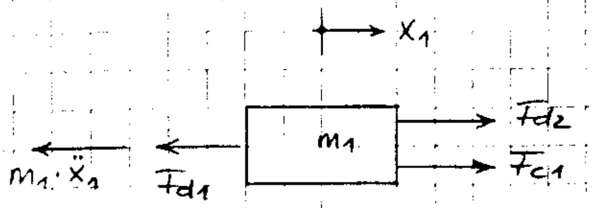
$$C = 50 \ \mathrm{kg}^{1/2}\cdot\mathrm{cm}^2 \quad ; \quad l_1 = \frac{50 \ \mathrm{kg}^{1/2}\cdot\mathrm{cm}^2}{\sqrt{181{,}23 \ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{cm}^2}} = 3{,}71 \ \mathrm{cm}$$

$$l_2 = \frac{50 \ \mathrm{kg}^{1/2}\cdot\mathrm{cm}^2}{\sqrt{139{,}67 \ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{cm}^2}} = 4{,}23 \ \mathrm{cm}$$



1) Freischneiden der Massen (Annahme $x_2 > x_1$)

a) Masse m_1



$$m \cdot \ddot{x}_1 + F_{d1} - F_{d2} - F_{c1} = 0$$

$$F_{d1} = d_1 \cdot \dot{x}_1 = 20 \, \frac{N \cdot s}{m} \cdot \dot{x}_1$$

$$F_{d2} = d_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 40 \, \frac{N \cdot s}{m} \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

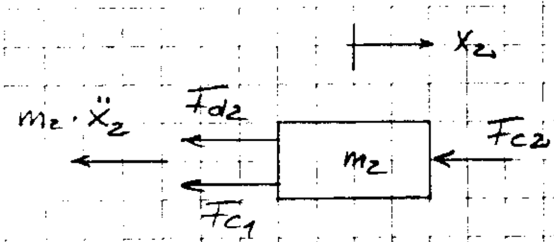
$$F_{c1} = C_1 \cdot (x_2 - x_1) = 1500 \, \frac{N}{m} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + d_1 \cdot \dot{x}_1 - d_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - C_1 \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (d_1 + d_2) \cdot \dot{x}_1 - d_2 \cdot \dot{x}_2 + C_1 \cdot x_1 - C_1 \cdot x_2 = 0$$

$$10 \, kg \cdot \ddot{x}_1 + 60 \, \frac{N \cdot s}{m} \cdot \dot{x}_1 - 40 \, \frac{N \cdot s}{m} \cdot \dot{x}_2 + 1500 \, \frac{N}{m} \cdot x_1 - 1500 \, \frac{N}{m} \cdot x_2 = 0$$

b) Masse m_2



$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + F_{d2} + F_{c1} + F_{c2} = 0$$

$$F_{c2} = C_2 \cdot x_2$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + d_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + C_1 \cdot (x_2 - x_1) + C_2 \cdot x_2 = 0$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - d_2 \cdot \dot{x}_1 + d_2 \cdot \dot{x}_2 - C_1 \cdot x_1 + (C_1 + C_2) \cdot x_2 = 0$$

$$20 \, kg \cdot \ddot{x}_2 - 40 \, \frac{N \cdot s}{m} \cdot \dot{x}_1 + 40 \, \frac{N \cdot s}{m} \cdot \dot{x}_2 - 1500 \, \frac{N}{m} \cdot x_1 + 3500 \, \frac{N}{m} \cdot x_2 = 0$$

Matrizielle Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} 10\,kg & 0 \\ 0 & 20\,kg \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60\,\frac{N\cdot s}{m} & -40\,\frac{N\cdot s}{m} \\ -40\,\frac{N\cdot s}{m} & 40\,\frac{N\cdot s}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1500\,\frac{N}{m} & -1500\,\frac{N}{m} \\ -1500\,\frac{N}{m} & 3500\,\frac{N}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

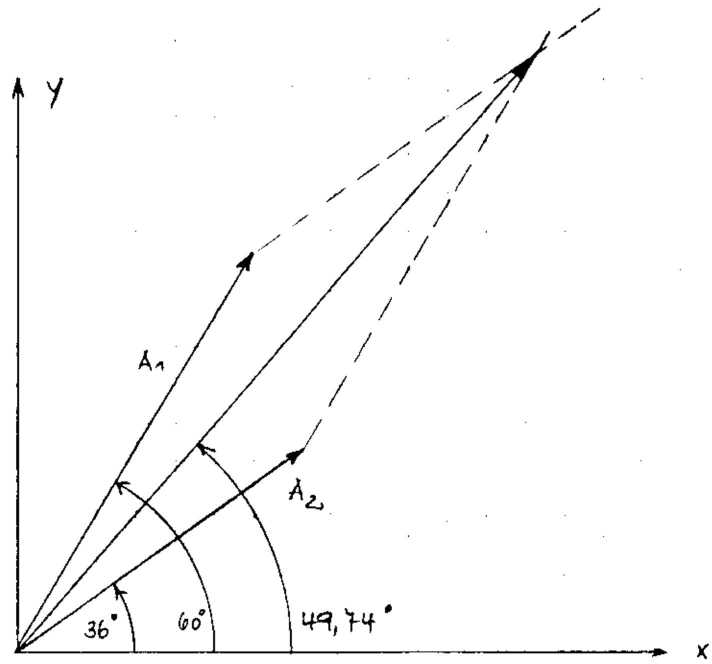
$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{x}} + \underline{D} \cdot \underline{\dot{x}} + \underline{C} \cdot \underline{x} = 0$$

1) Funktionsgleichung

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi\, s} = 1\, s^{-1}$$

$$y(t) = 4 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cdot \sin\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{5}\right)$$

2) Zeigerdiagramm für $t = 0$



Resultierender Zeiger A

$$x(0) = 4 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 3 \cdot \cos\frac{\pi}{5} = 4{,}427\,\text{cm}$$

$$y(0) = 4 \cdot \sin\frac{\pi}{3} + 3 \cdot \sin\frac{\pi}{5} = 5{,}227\,\text{cm}$$

$$A = \sqrt{(4{,}427\,\text{cm})^2 + (5{,}227\,\text{cm})^2} = 6.85\,\text{cm}$$

$$\tan\varphi = \frac{y(0)}{x(0)} = \frac{5{,}227\,\text{cm}}{4{,}427\,\text{cm}} = 1{,}1807$$

$$\varphi = 49{,}74°$$