Höhere Technische Mechanik

Teil 1

Klausur vom 23. September 1999
Fachbereich 04, Prof. Dr.-Ing. C. Eller

Name :	Matr.- Nr. :

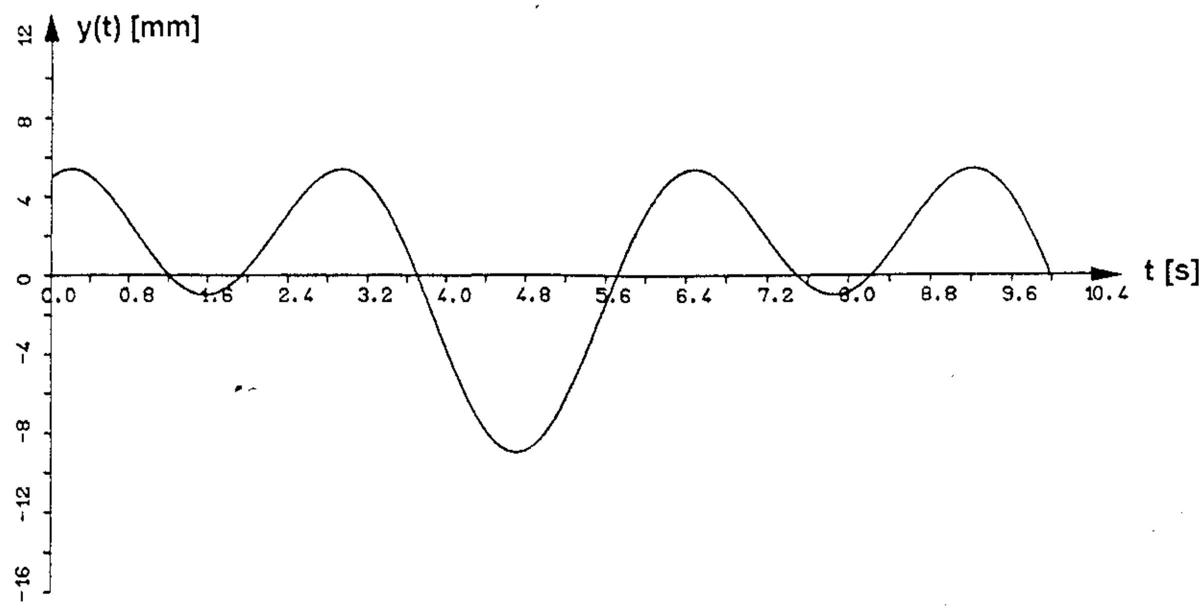
Hinweise:

Der Lösungsweg ist notwendiger Bestandteil der Klausurbearbeitung und muß daher mit abgegeben werden.
Die Angabe von Ergebnissen ohne erkennbaren Lösungsweg wird nicht als Lösung anerkannt, auch wenn die Ergebnisse richtig sind. Alle beigefügten losen Blätter sind mit dem Namen und der Matrikelnummer zu versehen.

Aufgabe	1	2	Gesamt
Punkte	17	13	30
erreicht			

Aufgabe 1

Die dargestellte periodische Funktion besitzt eine Periodendauer von $T = 2\pi$ s.



Die Funktion wird innerhalb einer Periode an m = 5 äquidistanten Stützstellen abgetastet. Die höchste im Signal vorkommende Kreisfrequenz beträgt $\omega_N = 2\ s^{-1}$.

i	0	1	2	3	4
t_i in s	0	$\frac{2}{5}\cdot\pi$	$\frac{4}{5}\cdot\pi$	$\frac{6}{5}\cdot\pi$	$\frac{8}{5}\cdot\pi$
$y(t_i)$ in mm	5	-0.2408	3.8962	-0.8061	-7.8493

1) Überprüfen Sie mit Hilfe des Shannonschen Abtasttheorems, ob m = 5 Sützstellen zur exakten Erfassung von y(t) ausreichen.

2) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 und geben sie die Fourierreihenentwicklung an.

3) Überführen Sie die Fourierreihe in die Darstellung :

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{2} A_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \varphi_k) .$$

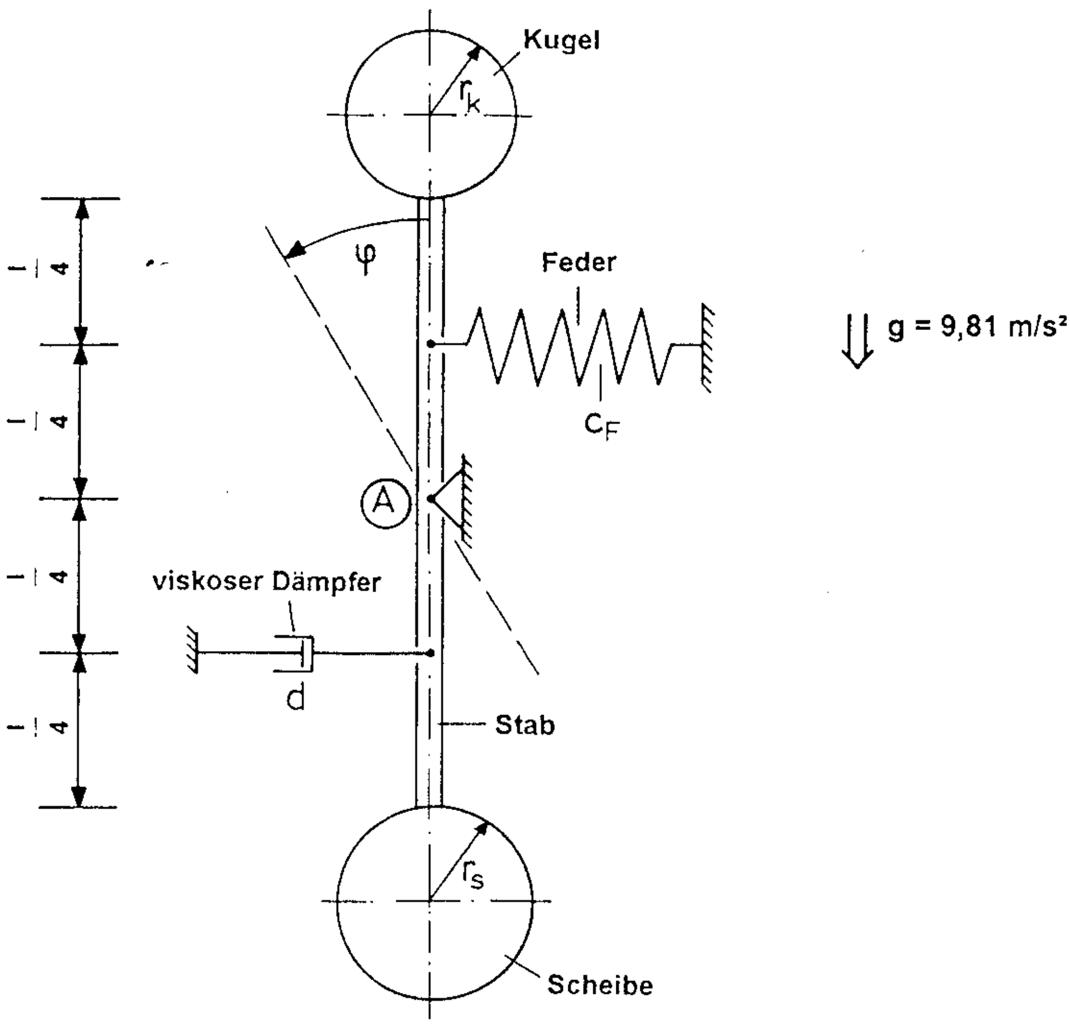
4) Zeichnen Sie das Amplituden- und Phasenwinkelspektrum.

Aufgabe 2

Für das dargestellte Schwingungssystem ermittle man:

1) die nichtlineare Bewegungsgleichung,

2) die linearisierte Bewegungsgleichung für kleine Ausschläge φ und kleine Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$.



Gegeben: Federsteifigkeit c_F, Dämpferkonstante d, Stabmasse m_{st}, Stablänge l, Kugelmasse m_k, Kugelradius r_k, Scheibenmasse m_s, Scheibenradius r_s

Massenträgheitsmomente in bezug auf die körpereigenen Schwerpunkte:

Kugel : $J_k = \frac{2}{5} \cdot m_k \cdot r_k^2$

Scheibe : $J_s = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot r_s^2$

Stab : $J_{st} = \frac{1}{12} \cdot m_{st} \cdot l^2$

(Das Schrägstellen von Feder und Dämpfer kann vernachlässigt werden) zu 1)

Shannon: $m \geq 2 \cdot f_N \cdot T$

$m \geq 2 \cdot \frac{\omega_N}{2\pi} \cdot 2\pi$

$m \geq 2 \cdot \omega_N = 4$

m = 5 ist ausreichend

zu 2)

a) Fourierkoeffizienten a_0, a_1, a_2

i	t_i	$y(t_i)$	$\cos\frac{2\cdot i\cdot\pi}{5}$	$\cos\frac{4\cdot i\cdot\pi}{5}$	$y_i\cdot\cos\frac{2\cdot i\cdot\pi}{5}$	$y_i\cdot\cos\frac{4\cdot i\cdot\pi}{5}$
0	0	5	1	1	5	5
1	$\frac{2}{5}\cdot\pi$	-0,2408	0,3090	-0,8090	-0,0744	0,1948
2	$\frac{4}{5}\cdot\pi$	3,8962	-0,8090	0,3090	-3,1520	1,2039
3	$\frac{6}{5}\cdot\pi$	-0,8061	-0,8090	0,3090	0,6521	-0,2490
4	$\frac{8}{5}\cdot\pi$	-7,8493	0,3090	-0,8090	-2,4254	6,3501
		0			0,0003 ~ 0	12,4998 $\sim 12,5$

$a_0 = \frac{1}{5}\cdot 0 = 0$; $a_1 = \frac{2}{5}\cdot 0$; $a_2 = \frac{2}{5}\cdot 12,5 = 5$

b) Fourierkoeffizienten b_1, b_2

i	t_i	$y(t_i)$	$\sin\frac{2\cdot i\cdot\pi}{5}$	$\sin\frac{4\cdot i\cdot\pi}{5}$	$y_i\cdot\sin\frac{2\cdot i\cdot\pi}{5}$	$y_i\cdot\sin\frac{4\cdot i\cdot\pi}{5}$
0	0	5	0	0	0	0
1	$\frac{2}{5}\cdot\pi$	-0,2408	0,9510	0,5878	-0,2290	-0,1415
2	$\frac{4}{5}\cdot\pi$	3,8962	0,5878	-0,9510	2,2902	-3,7053
3	$\frac{6}{5}\cdot\pi$	-0,8061	-0,5878	0,9510	0,4738	-0,7666
4	$\frac{8}{5}\cdot\pi$	-7,8493	-0,9510	-0,5878	7,4647	4,6138
					9,9997 ~ 10	0,0004 ~ 0

$b_1 = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4 \quad ; \quad b_2 = \frac{2}{5} \cdot 0 = 0$

$y(t) = 4 \cdot \sin t + 5 \cdot \cos 2t$

zu 3)

$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{4^2} = 4$

$A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{5^2} = 5$

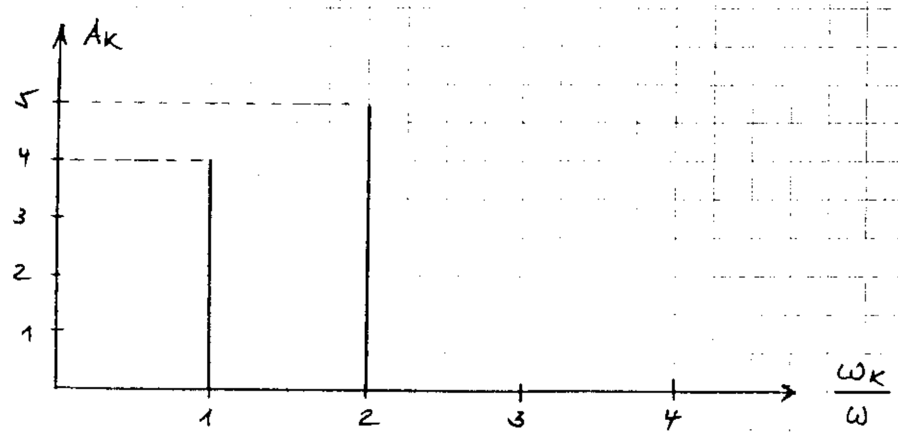
$\tan \varphi_1 = \frac{a_1}{b_1} = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0$

$\tan \varphi_2 = \frac{a_2}{b_2} \to \infty \Rightarrow \varphi_2 = \pi/2$

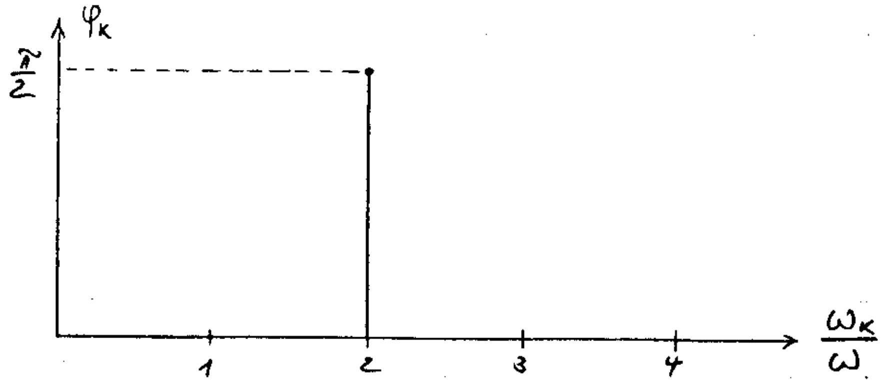
$y(t) = 4 \cdot \sin t + 5 \cdot \sin\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$

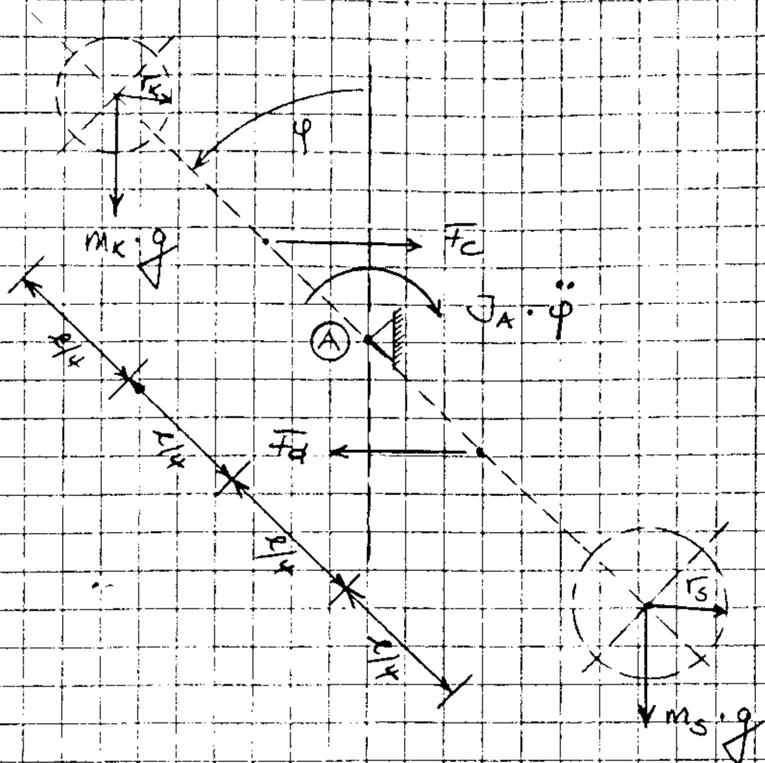
zu 4)

Amplitudenspektrum



Phasenwinkelspektrum





$$J_A = J_K + m_K \cdot \left(\frac{l}{2} + r_K\right)^2 + J_S + m_S \cdot \left(\frac{l}{2} + r_S\right)^2 + J_{St}$$

$$J_A = \frac{2}{5} \cdot m_K \cdot r_K^2 + m_K \cdot \left(\frac{l}{2} + r_K\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot r_S^2 + m_S \cdot \left(\frac{l}{2} + r_S\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot m_{St} \cdot l^2$$

$\underline{\sum M_{iA} = 0}$

$$m_K \cdot g \cdot \left(\frac{l}{2} + r_K\right) \cdot \sin\varphi - m_S \cdot g \cdot \left(\frac{l}{2} + r_S\right) \cdot \sin\varphi - F_c \cdot \frac{l}{4} \cdot \cos\varphi$$

$$- F_d \cdot \frac{l}{4} \cdot \cos\varphi - J_A \cdot \ddot{\varphi} = 0$$

$$F_c = c \cdot \frac{l}{4} \cdot \sin\varphi \; ; \; F_d = d \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{l}{4} \cdot \sin\varphi\right) = d \cdot \frac{l}{4} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi$$

<u>Nichtlineare Bewegungsgleichung</u>

$$J_A \cdot \ddot{\varphi} + d \cdot \frac{l^2}{16} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos^2\varphi + c \cdot \frac{l^2}{16} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + m_S \cdot g \cdot \left(\frac{l}{2} + r_S\right) \cdot \sin\varphi$$

$$- m_K \cdot g \cdot \left(\frac{l}{2} + r_K\right) \cdot \sin\varphi = 0$$

<u>Linearisierung</u>

$$f(\dot{\varphi}, \varphi) = d \cdot \frac{l^2}{16} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos^2\varphi + c \cdot \frac{l^2}{16} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + m_S \cdot g \cdot \left(\frac{l}{2} + r_S\right) \cdot \sin\varphi$$

$$- m_K \cdot g \cdot \left(\frac{l}{2} + r_K\right) \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot\varphi} = d \cdot \frac{\ell^2}{16} \cdot \cos^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \dot\varphi}\right|_{\substack{\varphi=0 \\ \dot\varphi=0}} = d \cdot \frac{\ell^2}{16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = d \cdot \frac{\ell^2}{16} \cdot \dot\varphi \cdot 2 \cdot \cos\varphi \cdot (-\sin\varphi) + c \cdot \frac{\ell^2}{16} \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$
$$+ m_S \cdot g \cdot \left(\frac{\ell}{2} + r_S\right) \cdot \cos\varphi - m_K \cdot g \cdot \left(\frac{\ell}{2} + r_K\right) \cdot \cos\varphi$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right|_{\substack{\dot\varphi=0 \\ \varphi=0}} = c \cdot \frac{\ell^2}{16} + m_S \cdot g \cdot \left(\frac{\ell}{2} + r_S\right) - m_K \cdot g \cdot \left(\frac{\ell}{2} + r_K\right)$$

<u>Linearisierte Bewegungsgleichung</u>

$$J_A \cdot \ddot\varphi + d \cdot \frac{\ell^2}{16} \cdot \dot\varphi + \left[c \cdot \frac{\ell^2}{16} + m_S \cdot g \cdot \left(\frac{\ell}{2} + r_S\right) - m_K \cdot g \cdot \left(\frac{\ell}{2} + r_K\right)\right] \cdot \varphi = 0$$