Höhere Technische Mechanik

Teil 3

Klausur vom 11. März 1999
Fachbereich 04, Prof. Dr.-Ing. C. Eller

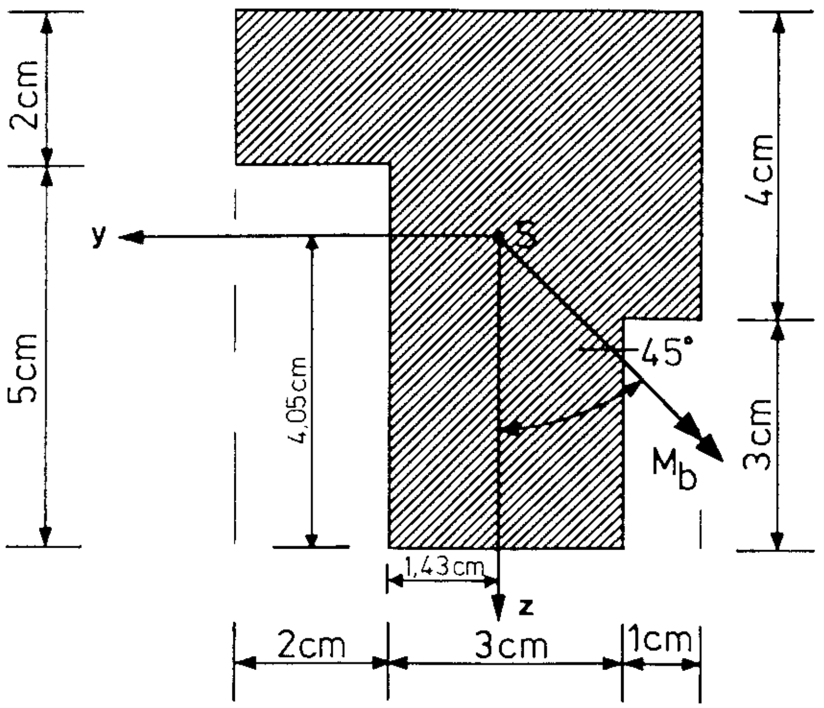
Name :	Matr.- Nr. :

Hinweise:
Der Lösungsweg ist notwendiger Bestandteil der Klausurbearbeitung und muß daher mit abgegeben werden.
Die Angabe von Ergebnissen ohne erkennbaren Lösungsweg wird nicht als Lösung anerkannt, auch wenn die Ergebnisse richtig sind. Alle beigefügten losen Blätter sind mit dem Namen und der Matrikelnummer zu versehen.

Aufgabe	1	2	Gesamt
Punkte	17	12	29
erreicht			

Aufgabe 1

Der dargestellte Querschnitt wird durch das Biegemoment $M_b = 2$ kN·m beansprucht. Der zugehörige Momentenvektor schließt einen Winkel von 45° mit der z-Achse ein. In einer Vorberechnung wurden die Flächenmomente I_y, I_z und I_{yz} in bezug auf die eingetragenen Schwerpunktachsen ermittelt.



$I_y = 117{,}59$ cm^4

$I_z = 58{,}28$ cm^4

$I_{yz} = -11{,}90$ cm^4

1) Bestimmen Sie die Lage der Hauptachsen 1 und 2 sowie die zugehörigen Hauptflächenmomente I_1 und I_2. Tragen Sie die Hauptachsen 1 und 2 in die obenstehende Querschnittsskizze ein.

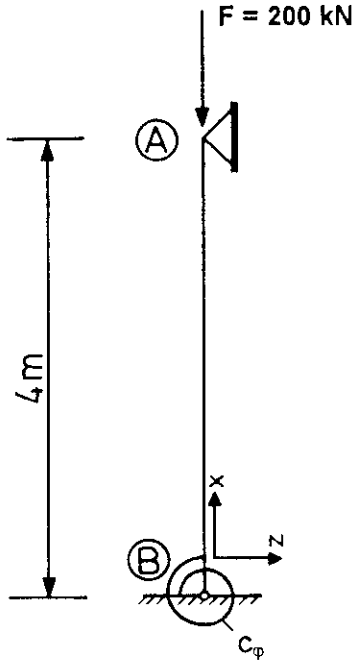
2) Ermitteln Sie die Lage der Spannungsnullinie und tragen Sie diese in das obenstehende Bild ein.

3) Berechnen Sie die maximale Zug- und Druckspannung im Querschnitt. In welchen Punkten des Querschnitts treten sie auf ?

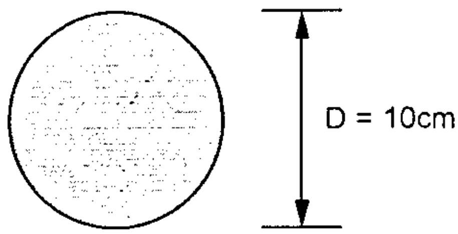
4) Skizzieren Sie den Verlauf der Biegespannungen über den Querschnitt.

Aufgabe 2

Der dargestellte Rundstab aus Stahl St 37 ($E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm²) wird im Punkt B durch die angegebene Kraft $\vec{F} = 200$ kN beansprucht. Im Punkt A ist der Stab unverschieblich und drehelastisch gelagert. Die Federsteifigkeit der Drehfeder beträgt $c_\varphi = 1200$ kN·m.



Querschnitt



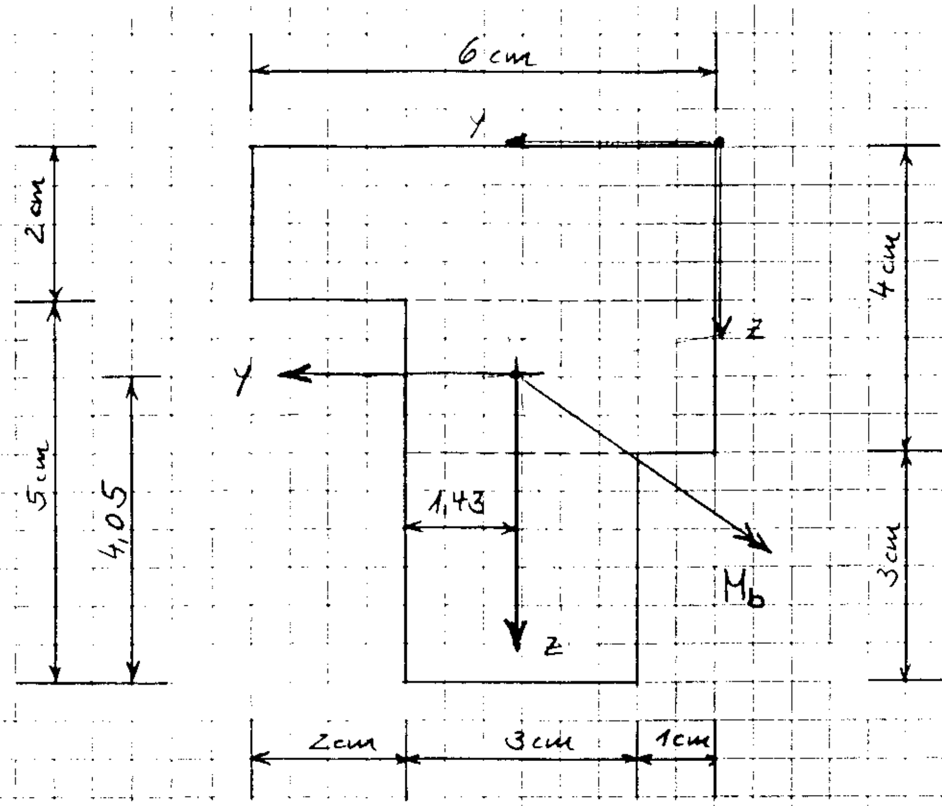
Stahl St 37:

Grenzschlankheit $\lambda_g = 105$

1) Berechnen Sie die Knickkraft durch iterative Lösung der zugehörigen Knickbedingung. (Startwert der Iteration $\kappa_0 = 3{,}8$). Bestimmen Sie κ auf zwei Nachkommastellen.

2) Wie groß ist die vorhandene Sicherheit gegen Knicken ?

3) Bestimmen Sie die Knicklänge des Stabes und überprüfen Sie die Zulässigkeit der durchgeführten elastischen Berechnung.



$$A = 6\,cm \cdot 2\,cm + 4\,cm \cdot 2\,cm + 3\,cm \cdot 3\,cm = 29\,cm^2$$

$$z_s = \frac{12\,cm^2 \cdot 1\,cm + 8\,cm^2 \cdot 3\,cm + 9\,cm^2 \cdot 5{,}5\,cm}{29\,cm^2} = 2{,}948\ cm$$

$$y_s = \frac{12\,cm^2 \cdot 3\,cm + 8\,cm^2 \cdot 2\,cm + 9\,cm^2 \cdot 2{,}5\,cm}{29\,cm^2} = 2{,}569\ cm$$

$$I_y = \frac{6\,cm \cdot (2\,cm)^3}{12} + 12\,cm^2 \cdot (-1{,}948\,cm)^2 + \frac{4\,cm \cdot (2\,cm)^3}{12} + 8\,cm^2 \cdot (0{,}052\,cm)^2$$

$$+ \frac{3\,cm \cdot (3\,cm)^3}{12} + 9\,cm^2 \cdot (2{,}552\,cm)^2 = 117{,}589\,cm^4$$

$$I_z = \frac{2\,cm \cdot (6\,cm)^3}{12} + 12\,cm^2 \cdot (0{,}431\,cm)^2 + \frac{2\,cm \cdot (4\,cm)^3}{12} + 8\,cm^2 \cdot (-0{,}569\,cm$$

$$+ \frac{3\,cm \cdot (3\,cm)^3}{12} + 9\,cm^2 \cdot (-0{,}069\,cm)^2 = 58{,}279\,cm^4$$

$$I_{yz} = 12\,cm^2 \cdot (-1{,}948\,cm) \cdot (0{,}431\,cm) + 8\,cm^2 \cdot (0{,}052\,cm) \cdot (-0{,}569\,cm)$$

$$+ 9\,cm^2 \cdot (2{,}552\,cm) \cdot (-0{,}069\,cm) = -11{,}897\,cm^4$$

1) Hauptachsen, Hauptflächenmomente

$$\tan 2\varphi = -\frac{2\cdot(-11{,}90\,cm^4)}{117{,}59\,cm^4 - 58{,}28\,cm^4} = 0{,}4013$$

$$2\varphi = 21{,}86$$

$$\varphi = 10{,}93°$$

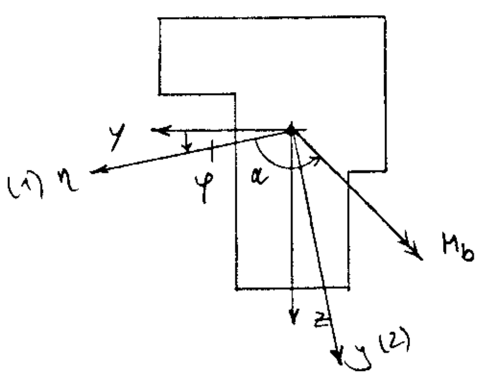
$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cdot\cos 2\varphi - I_{yz}\cdot\sin 2\varphi$$

$$I_\eta = \frac{117{,}59 + 58.28}{2} + \frac{117{,}59 - 58{,}28}{2}\cdot\cos 21{,}86° - (-11{,}9)\cdot\sin 21{,}86°$$

$$I_\eta = 87{,}94\,cm^4 + 27{,}52\,cm^4 + 4{,}43\,cm^4 = 119{,}89\,cm^4 = I_1$$

$$I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cdot\cos 2\varphi + I_{yz}\cdot\sin 2\varphi$$

$$I_\zeta = 87{,}94\,cm^4 - 27{,}52\,cm^4 - 4{,}43\,cm^4 = 55{,}99\,cm^4 = I_2$$

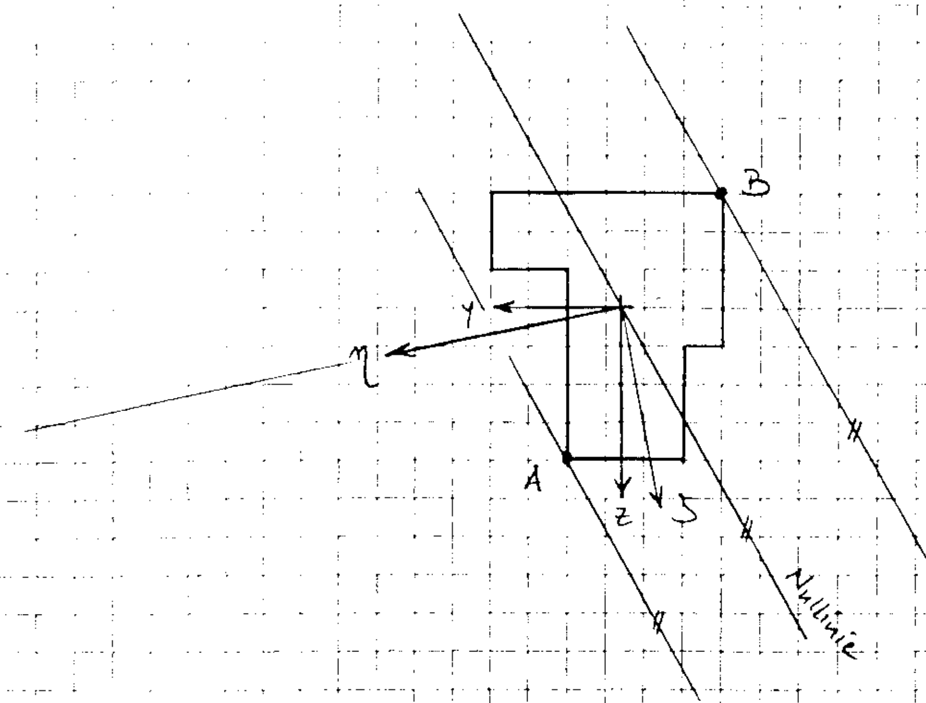


2) Spannungsnullinie

$$\alpha = 90° + 45° - \varphi = 124.03$$

$$\tan\beta = \frac{119{,}89\,cm^4}{55{,}99\,cm^4}\cdot\tan 124.03 = -3{,}17$$

$$\beta = -72{,}49°$$



3) Maximale Zug- und Druckspannung

$M_{b\eta} = M_{b1} = M_b \cdot \cos\alpha = 2\,kN\cdot m \cdot \cos 124{,}03° = -1{,}12\,kN\cdot m$

$M_{b\zeta} = M_{b2} = M_b \cdot \sin\alpha = 2\,kN\cdot m \cdot \sin 124{,}03° = 1{,}65\,kN\cdot m$

Punkt A : $y_A = 1{,}43\,cm$; $z_A = 4{,}05\,cm$

Punkt B : $y_B = -2{,}57\,cm$; $z_B = -2{,}95\,cm$

$\eta_A = 4{,}05\,cm \cdot \sin 10{,}93° + 1{,}43\,cm \cdot \cos 10{,}93° = 2{,}17\,cm$

$\zeta_A = 4{,}05\,cm \cdot \cos 10{,}93° - 1{,}43\,cm \cdot \sin 10{,}93° = 3{,}71\,cm$

$\eta_B = -2{,}95\,cm \cdot \sin 10{,}93° - 2{,}57\,cm \cdot \cos 10{,}93° = -3{,}08\,cm$

$\zeta_B = -2{,}95\,cm \cdot \cos 10{,}93° + 2{,}57\,cm \cdot \sin 10{,}93° = -2{,}41\,cm$

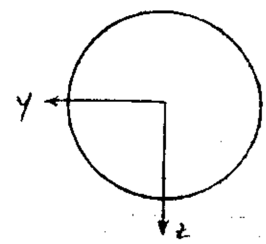
$\sigma_b^A = \frac{-112\,kN\cdot cm}{119{,}89\,cm^4} \cdot 3{,}71\,cm - \frac{165\,kN\cdot cm}{55{,}99\,cm^4} \cdot 2{,}17\,cm = -9{,}86\,\frac{kN}{cm^2}$

$\sigma_b^A = -98{,}6\,\frac{N}{mm^2}$

$\sigma_b^B = -\frac{112\,kN\cdot cm}{119{,}89\,cm^4} \cdot (-2{,}41\,cm) - \frac{165\,kN\cdot cm}{55{,}99\,cm^4} \cdot (-3{,}08\,cm) = 11{,}33\,\frac{k}{cm}$

$\sigma_b^B = 113{,}3\,\frac{N}{mm^2}$

$$I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{\pi \cdot (10\,cm)^4}{64} = 490{,}87\ cm^4$$



$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot (10\,cm)^2}{4} = 78{,}54\ cm^2$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{490{,}87\,cm^4}{78{,}54\,cm^2}} = 2{,}50\ cm$$

<u>Knickbedingung</u>

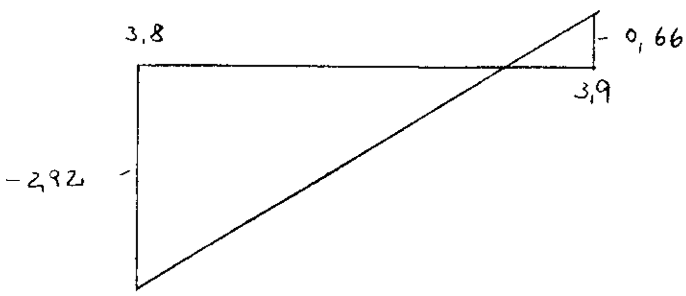
$$(\kappa + \varkappa^2) \cdot \tan\varkappa - \kappa \cdot \varkappa = 0$$

$$\kappa = \frac{c_\varphi \cdot l}{E \cdot I_y} = \frac{1200\,kN \cdot m \cdot 4\,m}{2{,}1 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2} \cdot 490{,}87 \cdot 100^{-4}\ m^4} = 4{,}656$$

$$4{,}656 \cdot \tan\varkappa + \varkappa^2 \cdot \tan\varkappa - 4{,}656 \cdot \varkappa = 0$$

Startwert $\varkappa = 3{,}8 \ : \ f(\varkappa) = -2{,}92$

$\varkappa = 3{,}9 \ : \ f(\varkappa) = 0{,}66$



$$\frac{0{,}1}{(2{,}92 + 0{,}66)} = \frac{\Delta}{2{,}92} \Rightarrow \Delta = \frac{2{,}92 \cdot 0{,}1}{(2{,}92 + 0{,}66)} = 0{,}082$$

$$\varkappa_{neu} = 3{,}8 + 0{,}082 = 3{,}882 \ : \ f(\varkappa_{neu}) = -0{,}048 \sim 0$$

$$\varkappa = 3{,}882$$

$$k = \frac{\varkappa}{l} = \frac{3{,}882}{4\,m} = 0{,}9705$$

$$\frac{F_K}{E \cdot I_y} = k^2 \Rightarrow F_K = k^2 \cdot E \cdot I_y$$

$$F_K = 0{,}9705^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2} \cdot 490{,}87 \cdot 100^{-4}\, m^4 = 970{,}91\ kN$$

$$\nu = \frac{970{,}91\ kN}{200\ kN} = 4{,}85$$

<u>Knicklänge:</u>

$$F_K = \frac{E \cdot I_y \cdot \pi^2}{s_K^2}$$

$$s_K = \sqrt{\frac{E \cdot I_y \cdot \pi^2}{F_K}} = \sqrt{\frac{2{,}1 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2} \cdot 490{,}87 \cdot 100^{-4}\, m^4 \cdot \pi^2}{970{,}91\ kN}}$$

$$s_K = 3{,}24\ m$$

<u>Schlankheit</u>

$$\lambda = \frac{s_K}{i_y} = \frac{324\ cm}{2{,}5\ cm} = 129{,}6 > 105 = \lambda_{grenz}$$

$\Rightarrow$ Elastische Berechnung o.k.