Höhere Technische Mechanik

Teil 2

Klausur vom 16. März 2000
Fachbereich 04, Prof. Dr.-Ing. C. Eller

Name :	**Matr.- Nr. :**

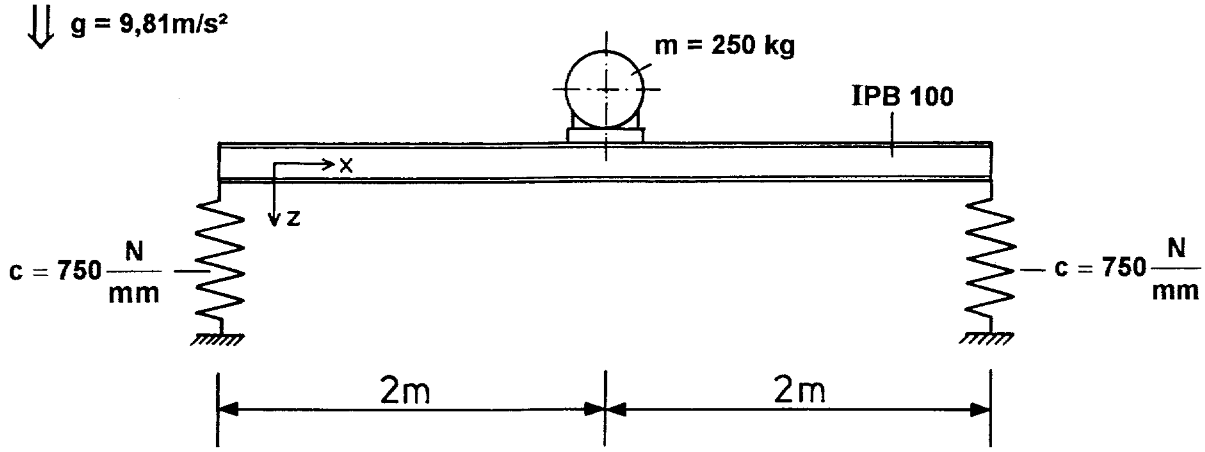
Hinweise:

Der Lösungsweg ist notwendiger Bestandteil der Klausurbearbeitung und muß daher mit abgegeben werden.
Die Angabe von Ergebnissen ohne erkennbaren Lösungsweg wird nicht als Lösung anerkannt, auch wenn die Ergebnisse richtig sind. Alle beigefügten losen Blätter sind mit dem Namen und der Matrikelnummer zu versehen.

Aufgabe	1	2	Gesamt
Punkte	15	15	30
erreicht			

Aufgabe 1

Der dargestellte Stahlträger ($E = 2{,}1 \cdot 10^5\ N/mm^2$) wird in der Mitte durch einen Motor belastet, dessen Rotor eine Unwucht $U = m_u \cdot r_u = 0{,}5\ kg \cdot m$ besitzt. Die Gesamtmasse des Motors beträgt m = 250 kg. Das Trägereigengewicht sowie Dämpfungseinflüsse können vernachlässigt werden.



IPB 100 : $I_y = 450\ cm^4$; $W_{by} = 89{,}9\ cm^3$

1) Ermitteln Sie die Federsteifigkeit des äquivalenten Feder-Masse-Modells.

2) Bestimmen Sie die Kennkreisfrequenz des Systems.

3) Wie groß darf die Schwingungsamplitude $\hat{x}$ sein, wenn die zulässige Biegespannung des Trägers auf $\sigma_{bzul} = 70\ N/mm^2$ begrenzt ist ? Welcher Drehzahlbereich muß vermieden werden, damit die Schwingungsamplitude nicht überschritten wird ?

zu 1) Federsteifigkeit c_{ges}

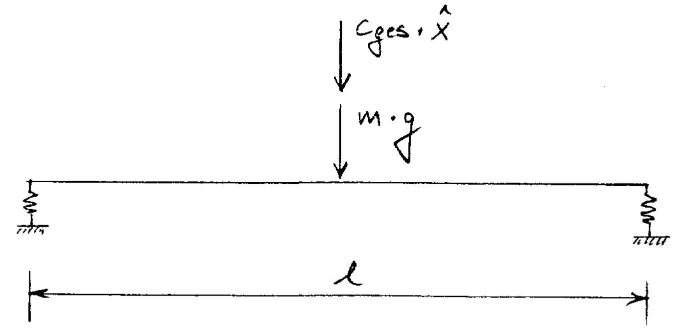
$$c_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{(4000\,mm)^2} \cdot \left[\frac{(2000\,mm)^2}{750\,\frac{N}{mm}} + \frac{(2000\,mm)^2}{750\,\frac{N}{mm}} \right] + \left[\frac{(2000\,mm)^2 \cdot (2000\,mm)^2}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5\,\frac{N}{mm^2} \cdot 450 \cdot 10^4\,mm^4 \cdot 4000\,mm} \right]}$$

$$c_{ges} = 481{,}324\,\frac{N}{mm}$$

zu 2) Kennkreisfrequenz ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_{ges}}{m}} = \sqrt{\frac{481324\,\frac{N}{m}}{250\,kg}} = 43{,}88\,s^{-1}$$

zu 3)



$$M_{by} = (c_{ges} \cdot \hat{x} + m \cdot g) \cdot \frac{l}{4}$$

$$\sigma = \frac{M_{by}}{W_{by}} \leq \sigma_{bzul} \implies M_{byzul} = \sigma_{bzul} \cdot W_{by}$$

$$(c_{ges} \cdot \hat{x}_{zul} + m \cdot g) \cdot \frac{l}{4} = \sigma_{bzul} \cdot W_{by}$$

$$\hat{x}_{zul} = \frac{4 \cdot \sigma_{bzul} \cdot W_{by}}{c_{ges} \cdot l} - \frac{m \cdot g}{c_{ges}}$$

$$\hat{x}_{zul} = \frac{4 \cdot 70\,\frac{N}{mm^2} \cdot 89{,}9 \cdot 10^3\,mm^3}{481{,}324\,\frac{N}{mm} \cdot 4000\,mm} - \frac{250\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{481{,}324\,\frac{N}{mm}}$$

$$\hat{x}_{zul} = 7{,}98\,mm$$

$$\hat{x} = V_2(\eta) \cdot \frac{m_u \cdot r_u}{m}$$

$$\frac{m_u \cdot r_u}{m} = \frac{0{,}5\,kg \cdot m}{250\,kg} = 0{,}002\,m = 2\,mm$$

$$V_2(\eta) = \frac{7{,}98\,mm}{2\,mm} = 3{,}99$$

$$\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2}} = 3{,}99$$

$$\frac{\eta^4}{(1-\eta^2)^2} = 15{,}92$$

$$\eta^4 - 15{,}92 \cdot (1-\eta^2)^2 = 0$$

$$\eta^4 - 15{,}92 \cdot (1 - 2\eta^2 + \eta^4) = 0$$

$$\eta^4 - 15{,}92 + 31{,}84 \cdot \eta^2 - 15{,}92 \cdot \eta^4 = 0$$

$$-14{,}92 \cdot \eta^4 + 31{,}84 \cdot \eta^2 - 15{,}92 = 0$$

$$\eta^4 - 2{,}134 \cdot \eta^2 + 1{,}067 = 0$$

$$\lambda^2 - 2{,}134 \cdot \lambda + 1{,}067 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = 1{,}067 \pm \sqrt{1{,}067^2 - 1{,}067}$$

$$\lambda_1 = 0{,}7996 \; ; \; \lambda_2 = 1{,}334$$

$$\eta_1 = 0{,}8942 \; ; \; \eta_2 = 1{,}1549$$

$$\frac{\Omega_1}{\omega_0} = 0{,}8942 \Rightarrow \Omega_1 = 0{,}8942 \cdot 43{,}88\,s^{-1} = 39{,}24\,s^{-1}$$

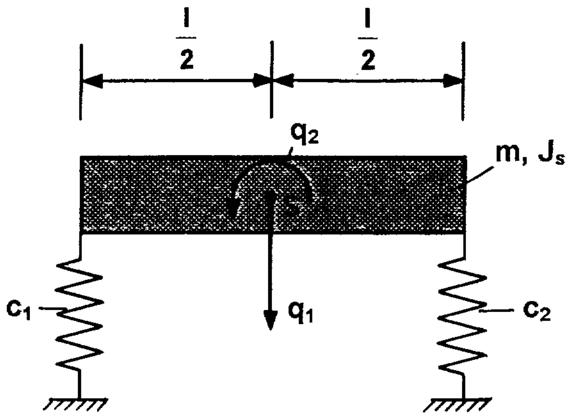
$$\frac{\Omega_2}{\omega_0} = 1{,}1549 \Rightarrow \Omega_2 = 1{,}1549 \cdot 43{,}88\,s^{-1} = 50{,}68\,s^{-1}$$

$$n_u = \frac{39{,}24\,s^{-1}}{2\pi} \cdot 60\,\frac{s}{min} = 374{,}7\,min^{-1}$$

$$n_o = \frac{50{,}68\,s^{-1}}{2\pi} \cdot 60\,\frac{s}{min} = 483{,}96\,min^{-1}$$

Aufgabe 2

Für den dargestellten Koppelschwinger soll eine Eigenschwingungsanalyse durchgeführt werden.



Gegeben:

$c_1 = 3000$ N/m ; $c_2 = 2000$ N/m

$m = 120$ kg ; $J_s = 10$ kg·m²

$l = 1$m

Die Eigenschwingungen um die statische Ruhelage des Systems werden durch die Differentialgleichung

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & (c_1 - c_2) \cdot \frac{l}{2} \\ (c_1 - c_2) \cdot \frac{l}{2} & (c_1 + c_2) \cdot \frac{l^2}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\ddot{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{0}}$$

beschrieben.

1) Ermitteln Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_1 und ω_2.

2) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$.

3) Skalieren Sie die Eigenvektoren so, daß

$$\underline{\overline{x}}_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\overline{x}}_i = 1 \quad (i = 1, 2)$$

wird.

4) Bilden Sie die Modalmatrix $\underline{\Phi}$ der skalierten Eigenvektoren.

zu 1) Eigenkreisfrequenzen

$$\det\left(\underline{C} - \omega^2 \cdot \underline{M}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5000 & 500 \\ 500 & 1250 \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5000 - \omega^2 \cdot 120 & 500 \\ 500 & 1250 - \omega^2 \cdot 10 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(5000 - 120 \cdot \omega^2) \cdot (1250 - 10 \cdot \omega^2) - 500^2 = 0$$

$$6250000 - 50000 \cdot \omega^2 - 150000 \cdot \omega^2 + 1200 \cdot \omega^4 - 250000 = 0$$

$$1200 \cdot \omega^4 - 200000 \cdot \omega^2 + 6000000 = 0$$

$$\omega^4 - 166,\bar{6} \cdot \omega^2 + 5000 = 0$$

$$\lambda^2 - 166,\bar{6} \cdot \lambda + 5000 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = 83,\bar{3} \pm \sqrt{83,\bar{3}^2 - 5000}$$

$$\lambda_1 = 39,24\ s^{-2} \ ; \ \lambda_2 = 127,43\ s^{-2}$$

$$\omega_1 = 6,26\ s^{-1} \ ; \ \omega_2 = 11,29\ s^{-2}$$

zu 2) Eigenvektoren

a) Eigenvektor $\underline{X}_1$

$$\begin{bmatrix} 5000 - 39,24 \cdot 120 & 500 \\ 500 & 1250 - 39,24 \cdot 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$291,2 \cdot X_{11} + 500 \cdot X_{12} = 0 \Rightarrow X_{11} = -1,72 \cdot X_{12}$$

$$500 \cdot X_{11} + 857,6 \cdot X_{12} = 0 \Rightarrow X_{11} = -1,72 \cdot X_{12}$$

gewählt: $X_{12} = -1 \ ; \ X_{11} = 1,72$

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}72 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(

b) Eigenvektor $\underline{x}_2$

$$\left[\begin{array}{c|c} 5000 - 127{,}43 \cdot 120 & 500 \\ \hline 500 & 1250 - 127{,}43 \cdot 10 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-10291{,}6 \cdot x_{21} + 500 \cdot x_{22} = 0 \implies x_{22} = 20{,}58 \cdot x_{21}$$

$$500 \cdot x_{21} - 24{,}3 \cdot x_{22} = 0 \implies x_{22} = 20{,}58 \cdot x_{21}$$

gewählt: $x_{21} = 1$; $x_{22} = 20{,}58$

$$\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 20{,}58 \end{bmatrix}$$

zu 3)

$$\begin{array}{ccc} & \left[\begin{array}{c|c} 120 & 0 \\ \hline 0 & 10 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} 1{,}72 \\ \hline -1 \end{array}\right] \\ \underline{x}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x}_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1{,}72 & -1 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c|c} 206{,}4 & -10 \end{array}\right] & \left[365{,}008 \right] \end{array}$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\underline{x}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x}_1}} = \frac{1}{\sqrt{365{,}008}} = 0{,}0523$$

$$\overline{\underline{x}}_1 = c_1 \cdot \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0899 \\ -0{,}0523 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & \left[\begin{array}{c|c} 120 & 0 \\ \hline 0 & 10 \end{array}\right] & \begin{bmatrix} 1 \\ 20{,}58 \end{bmatrix} \\ \underline{x}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 20{,}58 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c|c} 120 & 205{,}8 \end{array}\right] & \left[4355{,}364 \right] \end{array}$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\underline{x}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x}_2}} = \frac{1}{\sqrt{4355{,}364}} = 0{,}01515$$

$$\overline{\underline{x}}_2 = c_2 \cdot \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}01515 \\ 0{,}31178 \end{bmatrix}$$

zu 4)

$$\underline{\Phi} = \left[\begin{array}{c|c} 0{,}0899 & 0{,}01515 \\ \hline -0{,}0523 & 0{,}31178 \end{array}\right]$$