Höhere Technische Mechanik

Teil 1

Klausur vom 24. September 1998
Fachbereich 04, Prof. Dr.-Ing. C. Eller

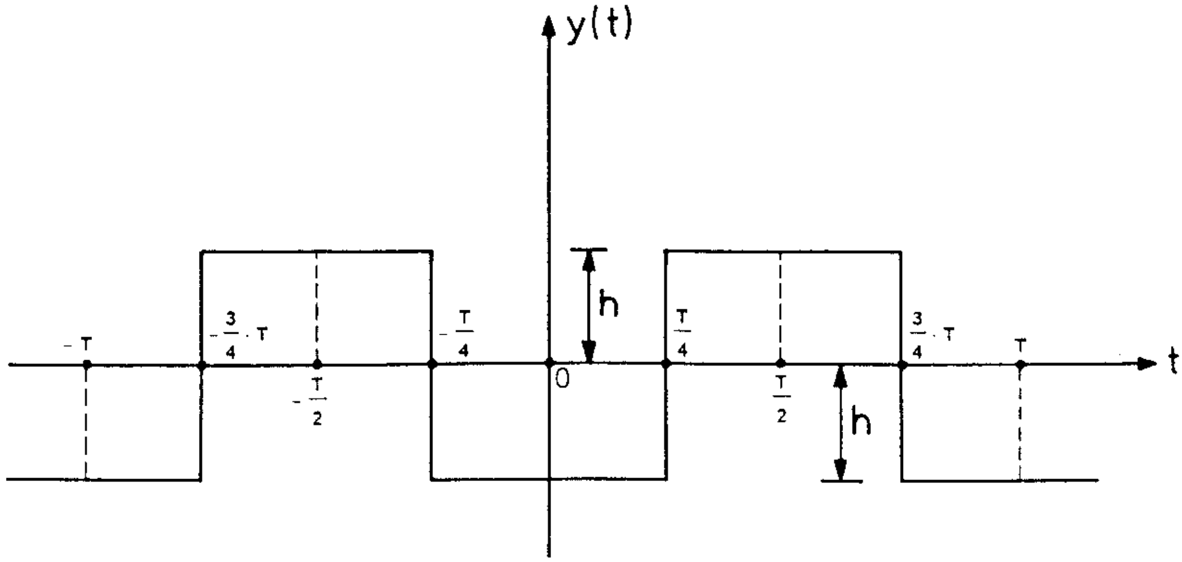
Name :	Matr.- Nr. :

Hinweise:
Der Lösungsweg ist notwendiger Bestandteil der Klausurbearbeitung und muß daher mit abgegeben werden.
Die Angabe von Ergebnissen ohne erkennbaren Lösungsweg wird nicht als Lösung anerkannt, auch wenn die Ergebnisse richtig sind. Alle beigefügten losen Blätter sind mit dem Namen und der Matrikelnummer zu versehen.

Aufgabe	1	2	3	Gesamt
Punkte	12	11	7	30
erreicht				

Aufgabe 1

Entwickeln Sie die dargestellte Rechteckkurve in eine Fourierreihe. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der ersten 10 Harmonischen und geben Sie die zugehörige Reihenentwicklung an. Stellen Sie das Amplitudenspektrum für die ersten 10 Harmonischen graphisch dar.

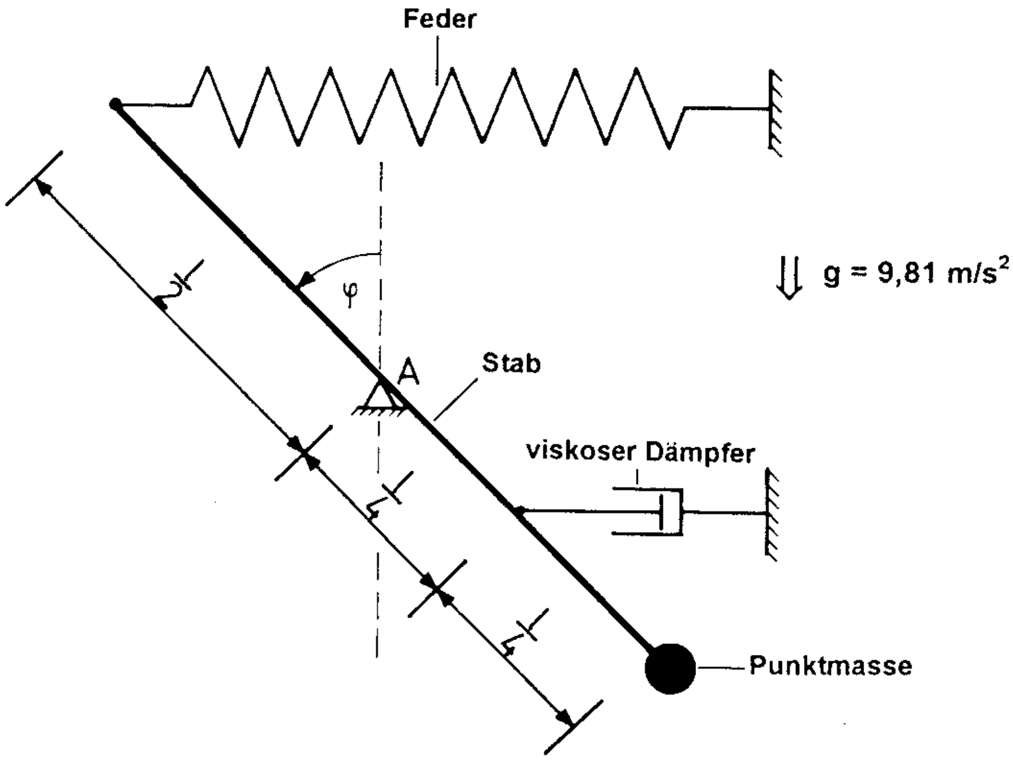


__Aufgabe 2__

Für das dargestellte Schwingungssystem ermittle man:

1) Die nichtlineare Bewegungsgleichung,

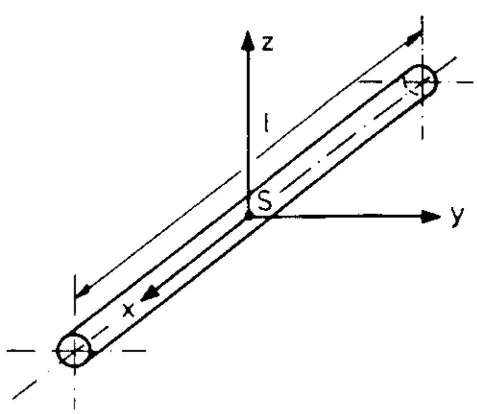
2) Die linearisierte Bewegungsgleichung für kleine Ausschläge φ und kleine Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$.



__Gegeben :__ Federsteifigkeit c, Dämpferkonstante d, Punktmasse m_P, Stablänge l, Stabmasse m_{St}

(Das Schrägstellen von Feder und Dämpfer kann vernachlässigt werden)

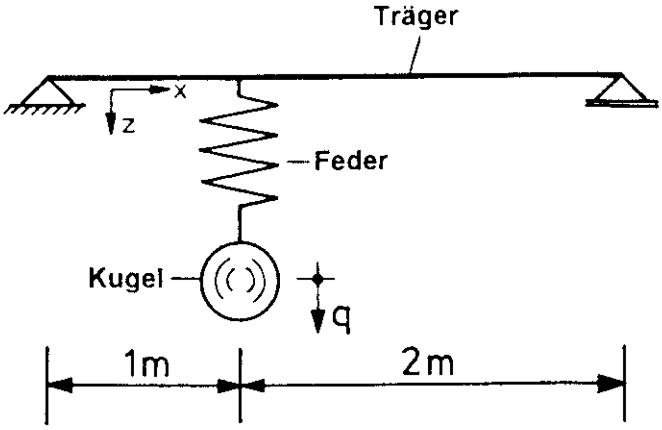
Massenträgheitsmoment des Stabes :



$$J_y = J_z = \frac{1}{12} \cdot m_{St} \cdot l^2$$

Aufgabe 3

Gegeben ist das dargestellte Schwingungssystem. Zur Zeit $t = 0$ wird die Kugel aus der statischen Ruhelage um $q_0 = 5$ cm ausgelenkt und anschließend losgelassen.



$\Downarrow$ $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

Träger: $E = 1{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{N/mm^2}$
$I_y = 120\ \mathrm{cm^4}$

Kugel: $m = 50$ kg

Feder: $c = 4{,}0 \cdot 10^4$ N/m

1) Bestimmen Sie die Federsteifigkeit des äquivalenten Feder-Masse Modells.

2) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 des Schwingungssystems.

3) Ermitteln Sie das Ort-Zeit-Gesetz $q(t)$ für die Vertikalbewegung der Kugel.

4) Welche Geschwindigkeit besitzt die Kugel zur Zeit $t = 5$ s ?

(Die Trägermasse und Dämpfungseinflüsse können vernachlässigt werden)

$y(t)$ ist eine gerade Funktion: $y(-t) = y(t) \Rightarrow b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot dt = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} (-h) \cdot dt + \frac{2}{T} \cdot \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} h \cdot dt$$

$$a_0 = -\frac{2 \cdot h}{T} \cdot \frac{T}{4} + \frac{2 \cdot h}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{4} \right) = -\frac{h}{2} + \frac{h}{2} = 0$$

$$a_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} y(t) \cdot \cos k \cdot \omega \cdot t \cdot dt$$

$$a_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/4} (-h) \cdot \cos k \cdot \omega \cdot t \cdot dt + \frac{4}{T} \cdot \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} h \cdot \cos k \cdot \omega \cdot t \cdot dt$$

$$a_k = -\frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \sin k \cdot \omega \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{4}} + \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \sin k \cdot \omega \cdot t \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}$$

$$a_k = \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \left[-\sin k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} + \sin k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} - \sin k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} \right]$$

$$a_k = \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \left[\cancelto{0}{\sin k \cdot \pi} - 2 \cdot \sin \frac{k \cdot \pi}{2} \right]$$

$$a_k = \frac{\cancelto{2}{4} \cdot h}{\cancel{T}} \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T}}} \cdot \left(-2 \cdot \sin k \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$a_k = -\frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sin k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$a_1 = -\frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \frac{1}{1}$; $a_2 = 0$; $a_3 = \frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \frac{1}{3}$; $a_4 = 0$

$a_5 = -\frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \frac{1}{5}$; $a_6 = 0$; $a_7 = \frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \frac{1}{7}$; $a_8 = 0$

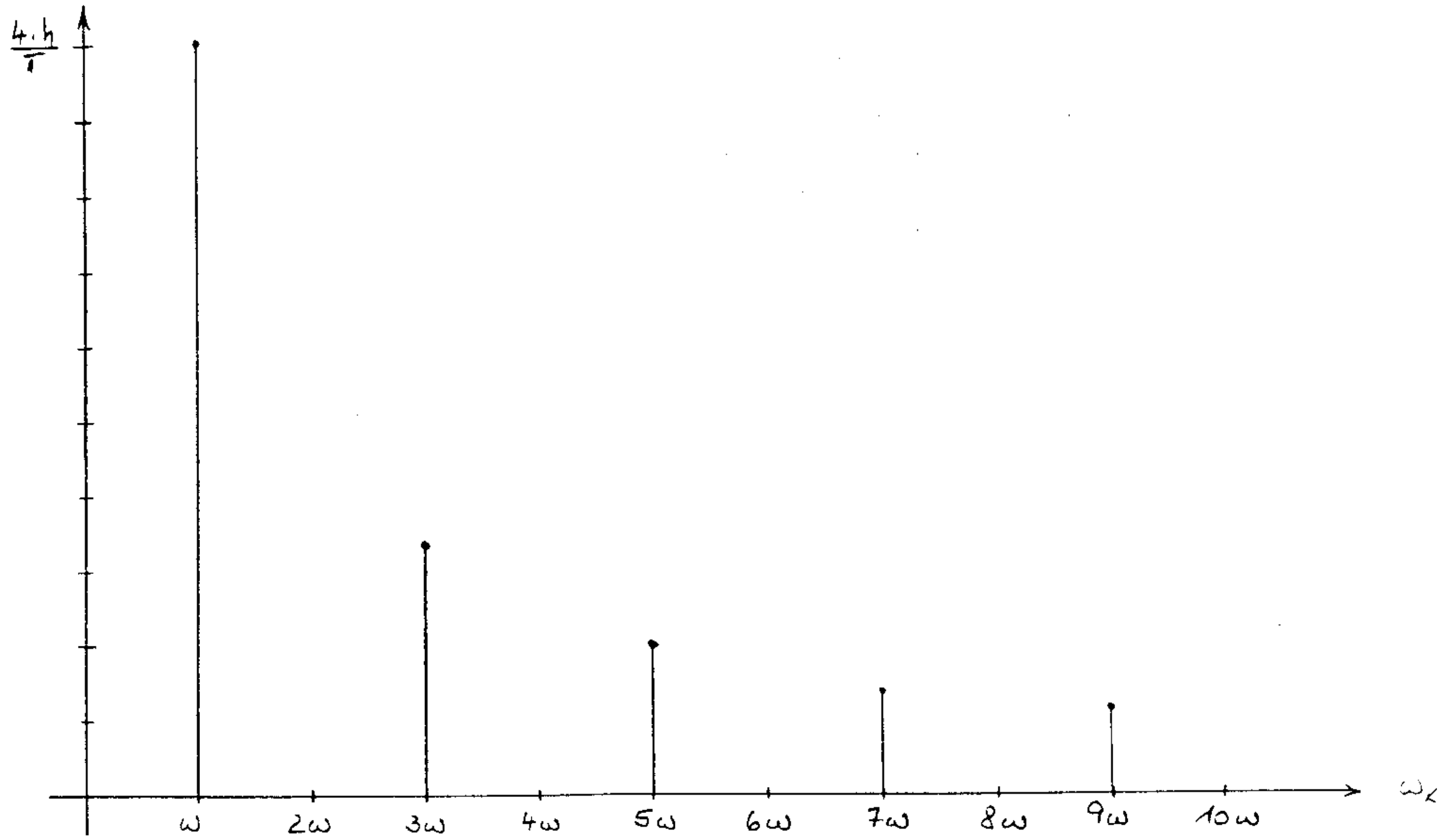
$a_9 = -\frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \frac{1}{9}$; $a_{10} = 0$

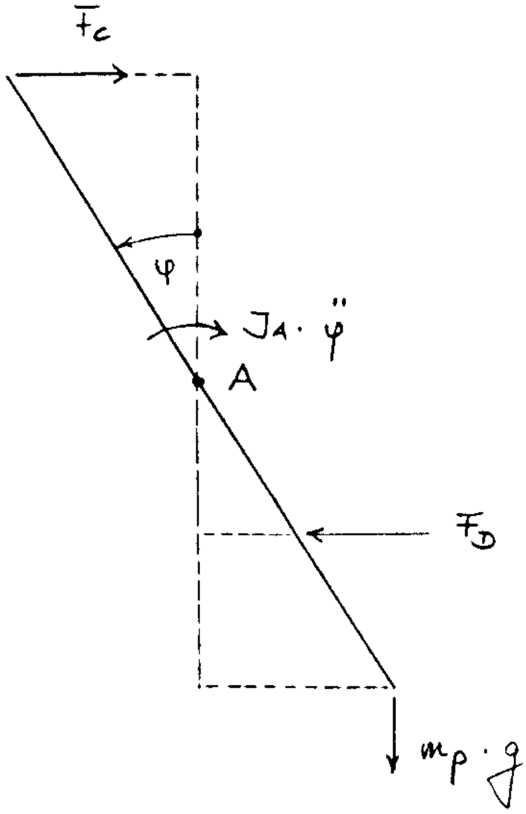
Damit lautet die Fourierreihe:

$$\tilde{y}(t) = -\frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \left(\cos \omega \cdot t - \frac{1}{3} \cdot \cos 3 \cdot \omega \cdot t + \frac{1}{5} \cdot \cos 5 \cdot \omega \cdot t - \frac{1}{7} \cdot \cos 7 \cdot \omega \cdot t + \frac{1}{9} \cdot \cos 9 \cdot \omega \cdot t \right)$$

Amplitudenspektrum

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{a_k^2}$$





<u>Massenträgheitsmoment J_A</u>

$$J_A = \frac{1}{12} \cdot m_{st} \cdot \ell^2 + m_p \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \left(\frac{m_{st}}{3} + m_p\right) \cdot \frac{\ell^2}{4}$$

<u>$\sum M_{iA} = 0$:</u>

$$J_A \cdot \ddot{\varphi} + F_D \cdot \frac{\ell}{4} \cdot \cos\varphi + F_c \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \cos\varphi + m_p \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin\varphi = 0$$

$$F_c = c \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin\varphi$$

$$F_D = d \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\ell}{4} \cdot \sin\varphi\right) = d \cdot \frac{\ell}{4} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi$$

$$\left(\frac{m_{st}}{3} + m_p\right) \cdot \frac{\ell^2}{4} \cdot \ddot{\varphi} + d \cdot \frac{\ell^2}{16} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos^2\varphi + c \cdot \frac{\ell^2}{4} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$
$$+ m_p \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin\varphi = 0$$

<u>Linearisierung:</u>

$$f(\dot{\varphi}, \varphi) = d \cdot \frac{\ell^2}{16} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos^2\varphi + c \cdot \frac{\ell^2}{4} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + m_p \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin\varphi$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} = d \cdot \frac{\ell^2}{16} \cdot \cos^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}}\right|_{\substack{\dot{\varphi}=0 \\ \varphi=0}} = d \cdot \frac{\ell^2}{16}$$

(

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -d \cdot \frac{\ell^2}{16} \cdot \dot{\varphi} \cdot 2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + c \cdot \frac{\ell^2}{4} \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$
$$+ m_p \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \cos\varphi$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right|_{\substack{\dot{\varphi}=0 \\ \varphi=0}} = c \cdot \frac{\ell^2}{4} + m_p \cdot g \cdot \frac{\ell}{2}$$

<u>Linearisierte Bewegungsgleichung</u>

$$\left(\frac{m_{St}}{3} + m_p\right) \cdot \frac{\ell^2}{4} \cdot \ddot{\varphi} + d \cdot \frac{\ell^2}{16} \cdot \dot{\varphi} + \left(c \cdot \frac{\ell^2}{4} + m_p \cdot g \cdot \frac{\ell}{2}\right) \cdot \varphi = 0$$

Federsteifigkeit

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I_y \cdot l} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{(1m)^2 \cdot (2m)^2}{3 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2} \cdot 120 \cdot 10^{-8} m^4 \cdot 3m} + \frac{1}{40000 \frac{N}{m}}$$

$$\frac{1}{c_{ges}} = 6{,}2037 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

$$c_{ges} = 16\,120 \frac{N}{m}$$

Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{16\,120 \frac{N}{m}}{50\ kg}} = 17{,}96\ s^{-1}$$

Ort - Zeit - Gesetz

$$x(t) = C_1 \cdot \cos \omega_0 \cdot t + C_2 \cdot \sin \omega_0 \cdot t$$

$$\dot{x}(t) = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 \cdot t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 \cdot t$$

$$x(t=0) = x_0 = 5cm = C_1$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = 0 = C_2 \cdot \omega_0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x(t) = 5cm \cdot \cos 17{,}96\ s^{-1} \cdot t$$

Geschwindigkeit zur Zeit t = 5s

$$\dot{x}(t) = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 \cdot t$$

$$\dot{x}(t=5s) = -5cm \cdot 17{,}96 s^{-1} \cdot \sin(17{,}96\ s^{-1} \cdot 5s) = -86{,}67 \frac{cm}{s}$$

$$|\dot{x}(t=5s)| = 86{,}67 \frac{cm}{s} \mathrel{\hat{=}} 0{,}8667 \frac{m}{s}$$