



# Multiple Scale Methods for Nonlinear Stability Analysis in Laser Cutting Processes

Georg Vossen, Wolfgang Schulz

{georg.vossen,wolfgang.schulz}@nld.rwth-aachen.de  
 Lehr- und Forschungsgebiet NLD, RWTH Aachen  
 Steinbachstr. 15, 52074 Aachen

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Übersicht</b>	<b>1</b>
<b>2 Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
2.1 Formulierung . . . . .	2
2.1.1 Gleichungen auf dem Berechnungsgebiet . . . . .	3
2.1.2 Randbedingungen . . . . .	3
2.2 Herleitung der Randbedingungen . . . . .	4
<b>3 Skalierung für Asymptotik langer Wellen und Potentialfunktion</b>	<b>5</b>
<b>4 Herleitung einer Gleichung für die Schmelzfilmdicke</b>	<b>6</b>
4.1 Vorbemerkung . . . . .	6
4.2 Formulierung im allgemeinen Fall . . . . .	7
4.3 Herleitung der Gleichung für die Schmelzfilmdicke . . . . .	8
4.3.1 Entwicklung der Aufgabe nach dem Kleinheitsparameter . . . . .	8
4.3.2 Bestimmung von Druck, Potential und Geschwindigkeiten . . . . .	8
4.3.3 Die Bewegungsgleichung . . . . .	10
4.3.4 Abschlussbemerkung zu den Randbedingungen . . . . .	10
4.4 Spezialfall: konstante Scherspannung und Druck . . . . .	10
<b>5 Analyse der Gleichung für die Schmelzfilmdicke</b>	<b>11</b>
5.1 Vorbemerkungen . . . . .	11
5.1.1 Entwicklung um eine stationäre Lösung . . . . .	11
5.1.2 Verschiedene Einstromsituationen: Wasserhahn und Schmelzströmung . . . . .	13
5.2 Wasserhahn . . . . .	13
5.2.1 Modell ohne Krümmung . . . . .	13
5.2.2 Modell mit Krümmung . . . . .	18
5.3 Schmelzströmung . . . . .	20
5.3.1 Modell ohne Krümmung . . . . .	21
5.3.2 Modell mit Krümmung . . . . .	22
<b>6 Ergebnisse</b>	<b>23</b>
<b>7 Planung</b>	<b>23</b>

## 1 Übersicht

In diesem Artikel wird ein Modell für einen Schneidprozess mit Laserstrahlung entwickelt und untersucht. Im Vordergrund der Analyse steht dabei die Untersuchung von Störungseinflüssen auf das System. Dazu führen wir eine nichtlineare Stabilitätsanalyse durch, bei der wir Multiskalenmethoden benutzen.



In Kapitel 2 wird zunächst ein Modell für den Verlauf einer Schmelzströmung hergeleitet, die beim Schneiden mit Laserstrahlen im bearbeiteten Material (z.B. Stahl) entsteht. Dieses Modell beruht auf den Navier-Stokes-Gleichungen für die Beschreibung von Druck und Geschwindigkeit in der Schmelze. Es entsteht ein freies Randwertproblem auf einem räumlich zweidimensionalen Berechnungsgebiet mit einem freien und zwei festen Rändern. Auf dem freien Rand wird eine kinematische Randbedingung formuliert.

In Kapitel 3 wird das Modell in dimensionslose Koordinaten transformiert. Ziel ist es, eine Stabilitätsanalyse durchzuführen, d.h. den zeitlichen Verlauf einer wellenförmigen Anfangsstörung mit der Wellenlänge  $\lambda$  zu untersuchen. Daher wird in diesem Kapitel zusätzlich eine Entwicklung der Gleichung bzgl. des Parameters  $h_0/\lambda$  durchgeführt, wobei  $h_0$  eine typische Skala für die Schmelzfilmdicke darstellt.

In Kapitel 4 formulieren wir das vorgestellte Modell so um, dass nur noch eine nichtlineare partielle Differentialgleichung für den Verlauf der Schmelzfilmdicke gelöst werden muss. Ziel ist die Formulierung einer Gleichung der Form

$$\frac{\partial h}{\partial t} + A(h) \frac{\partial h}{\partial z} + C(h) \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} + E(h) \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + F(h) = 0.$$

für die Schmelzfilmdicke  $h=h(z, t)$ . Hieraus lassen sich danach Druck und Geschwindigkeit in der Schmelze bestimmen.

Kapitel 5 behandelt die Analyse der Gleichung für den Verlauf der Schmelzfilmdicke. Hier werden ausführlich verschiedene Techniken (Methode der Charakteristiken, reguläre Störungstheorie, Multiskalenmethode) zur Lösung der Differentialgleichung diskutiert, um daraus Aussagen über die Stabilität zu gewinnen. Wir betrachten dabei die Modellaufgabe im oberen und unteren Bereich des Berechnungsgebietes getrennt und untersuchen jeweils die resultierende Gleichung sowohl unter Vernachlässigung als auch unter Berücksichtigung der Krümmung der Oberfläche. Einen zentralen Bestandteil der Arbeiten stellt die Analyse der Gleichungen im unteren Bereich unter Berücksichtigung der Krümmung dar. Es ergibt sich eine nichtlineare Gleichung mit räumlichen Ableitungen bis zur vierten Ordnung. Diese Aufgabe ist in (5.29) formuliert und wird mit Hilfe von Multiskalenmethoden gelöst.

## 2 Aufgabenstellung

### 2.1 Formulierung

Wir entwickeln ein räumlich zweidimensionales und zeitabhängiges Modell in den beiden Raumdimensionen  $x$  und  $z$  sowie der Zeitvariable  $t$  für das Schneiden mit Laserstrahlen, vgl. Abbildung 2.1. Der Laserstrahl trifft von oben auf das zu bearbeitende Material und erhitzt es. Bei Erreichen der Schmelztemperatur strömt geschmolzenes Material durch die Schmelzfront bei  $x=0$  in die Schmelze ein, d.h. die Aufgabe wird im schmelzfrontfesten Bezugssystem betrachtet. Durch von oben kommendes Schneidgas wird die Schmelze nach unten aus dem Material der Dicke  $d$  getrieben. Es entsteht eine Strömung in der Schmelze mit Schmelzfilmdicke  $h(z, t)$ , die wir im Folgenden genauer untersuchen.

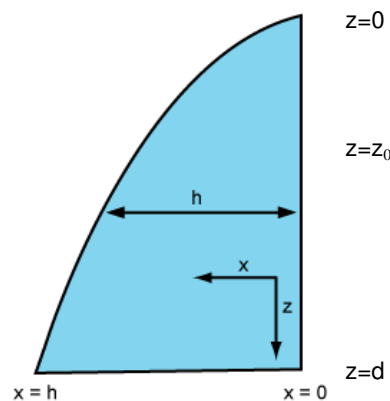


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Berechnungsgebietes der Schmelze

Das Berechnungsgebiet wird durch die Phasengrenze am Übergang zwischen der Schmelze und dem Schneidgas an der Absorptionsfront  $\partial\Gamma_a := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x = h(z, t), z \in [0, d]\}$ , die Phasengrenze am Übergang zwischen der Schmelze und dem festen Material an der ebenen Schmelzfront  $\partial\Gamma_m := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, z \in [0, d]\}$  sowie durch die Unterseite des Bleches  $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, h(z, t)], z = d\}$  begrenzt. Die Stelle  $z = z_0$  wird in Abschnitt 5.1.2 erläutert.

Die Formulierung beinhaltet Gleichungen, die auf dem gesamten Berechnungsgebiet erfüllt sein müssen, sowie Randbedingungen.

### 2.1.1 Gleichungen auf dem Berechnungsgebiet

Löse die Impulsbilanzen der Navier-Stokes-Gleichung für die Geschwindigkeiten  $v_x = v_x(x, z, t)$  und  $v_z = v_z(x, z, t)$  in  $x$ - bzw.  $z$ -Richtung sowie den Druck  $p = p(x, z, t)$  in der Schmelze:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \quad (2.3)$$

Hierbei sind  $\rho$  die Massendichte und  $\eta$  die dynamische Viskosität.

### 2.1.2 Randbedingungen

Das Berechnungsgebiet besitzt drei Ränder: die Phasengrenze  $\partial\Gamma_a$  am Übergang zwischen Schmelze und Gas, die Phasengrenze  $\partial\Gamma_m$  am Übergang zwischen Schmelze und dem festen Material sowie die Unterseite des Materials.

- Wir formulieren die Randbedingungen an der Absorptionsfront  $\partial\Gamma_a$ .

(a) Es gilt

$$p_g = p - 2\eta \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} - \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1} \quad (2.4)$$

$$+ \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right)^{-3/2}, \quad (2.5)$$

$$\tau_g = \eta \left[ 4 \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \left( 1 - \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right) \right] \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1}, \quad (2.6)$$

wobei  $\tau_g = \tau_g(z, t)$  die Scherkraft des Gasstrahls tangential,  $p_g = p_g(z, t)$  den Druck normal zur Absorptionsfront und  $\sigma$  die Oberflächenspannung beschreiben.

- Da die Absorptionsfront einen freien Rand darstellt, muss hier eine weitere Randbedingung gestellt werden. Diese so genannte kinematische Randbedingung für  $x = h(z, t)$  in Form einer Differentialgleichung mit Anfangs- und Randwerten lautet

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_z \frac{\partial h}{\partial z} = v_x, \quad h(0, t) = 0, \quad h(z, 0) = h_0(z), \quad (2.7)$$

mit den Geschwindigkeiten  $v_x = v_x(h(z, t), z, t)$  und  $v_z = v_z(h(z, t), z, t)$  der Schmelzfilmoberfläche in  $x$ - bzw.  $z$ -Richtung und einer Anfangsverteilung  $h_0(z)$ .

- An der Schmelzfront  $\partial\Gamma_m$  fordern wir für die Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_z$  die Bedingungen

$$v_x(x = 0, z, t) = v_p(z, t), \quad v_z(x = 0, z, t) = 0 \quad (2.8)$$

mit einem vorgegebenen Geschwindigkeitsprofil  $v_p(z, t)$  des Einströmens der Schmelze normal zur Schmelzfront.

- Am unteren Rand des Bleches werden keine Randbedingung gestellt.

## 2.2 Herleitung der Randbedingungen

1. (a) Die Randbedingungen (2.5) und (2.6) auf der Absorptionsfront  $\partial\Gamma_a$  ergeben sich mit Hilfe des Spannungstensors  $\vec{\sigma}$ , allgemein definiert als eine Matrix mit Komponenten

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad i, k = 1, 2, \quad (2.9)$$

mit in unserem Fall  $v_1 = v_x$ ,  $v_2 = v_z$ ,  $x_1 = x$  und  $x_2 = z$ . Der Spannungstensor lautet daher ausgeschrieben

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p + \eta \left( 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) & \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & -p + \eta \left( 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

An der Absorptionsfront herrscht das Kräftegleichgewicht

$$[\vec{\sigma} \cdot \vec{n}] = \sigma K \vec{n}. \quad (2.11)$$

Der Gasstrahl übt eine Scherkraft  $\tau_g$  tangential und einen Druck  $p_g$  normal zur Absorptionsfront aus. Die Schmelze hingegen wirkt dem Gasdruck die Oberflächenspannung  $\sigma$  und der Scherspannung durch die temperaturabhängige Oberflächenspannung (Marangoni-Effekt) entgegen. Diese Drucke bzw. Kraftdichten werden den Dichten der Trägheitskräfte  $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$  der Schmelze, die aus dem Spannungstensor  $\vec{\sigma}$  gewonnen werden, gleichgesetzt und es gilt

$$\vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) = -p_g + \sigma K, \quad (2.12)$$

$$\vec{t} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) = \tau_g. \quad (2.13)$$

Die Absorptionsfront ist eine freie Oberfläche und wird zu einem beliebigen, festen Zeitpunkt  $t$  mit der impliziten Gleichung

$$H(x, z, t) := x - h(z, t) = 0 \quad (2.14)$$

beschrieben. Die Vektoren in normaler  $\vec{n}$  und tangentialer  $\vec{t}$  Richtung dieser Fläche sind

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} H}{|\vec{\nabla} H|} = \frac{\{1, -\frac{\partial h}{\partial z}\}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h}{\partial z})^2}}, \quad \vec{t} = \frac{\{\frac{\partial h}{\partial z}, 1\}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h}{\partial z})^2}}. \quad (2.15)$$

Die Krümmung  $K$  einer Fläche  $x = h(z, t)$  ist

$$K = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right)^{-3/2}. \quad (2.16)$$

Aus den Randbedingungen (2.12) und (2.13) für die Absorptionsfront bzw. die Oberfläche  $x = h(z, t)$  folgt damit

$$\begin{aligned} -p_g &= \vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) - \sigma K \\ &= -p + 2\eta \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} - \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1} \\ &\quad - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right)^{-3/2}, \\ \tau_g &= \vec{t} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) = \left[ 2\eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \left( 1 - \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right) \right] \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Umsortieren der Gleichung für  $\tau_g$  und Ausnutzen der Divergenzfreiheit (2.1) ergibt (2.6).

- (b) Wir betrachten einen Punkt  $(x, z)$  auf der Oberfläche  $H$  aus (2.14) und untersuchen seinen zeitlichen Verlauf  $(x(t), z(t))$ . Der Punkt besitzt die Geschwindigkeit  $(\dot{x}, \dot{z}) = (v_x, v_z)$ . Durch zeitliche Differentiation der Gleichung (2.14) erhält man

$$0 \equiv \frac{d}{dt} H(x(t), z(t), t) = \dot{x} - h_z \dot{z} - h_t = v_x - h_z v_z - h_t.$$

Umstellen ergibt die kinematische Randbedingung (2.7), wobei die Anfangsbedingung in  $z=0$  bedeutet, dass der Schmelzfilm an der Oberkante des Materials verschwindet.

2. Die Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_z$  der Schmelzströmung auf der Schmelzfront  $\partial\Gamma_m$  und die Geschwindigkeit der festen Phase auf der Schmelzfront sind gleich (Stetigkeit). Daraus ergibt sich sofort die erste Randbedingung in (2.8).
3. An der Ausströmkante, d.h. an der Unterseite des Bleches ( $z = d$ ), können die Randbedingung aufgrund der Grenzschichteigenschaften der Strömung vernachlässigt werden, denn diese Randbedingung beeinflusst die Lösung stromaufwärts nur auf einer Länge in Ausströmrichtung mit einer Skala  $d_m/d$ . Eine andere Möglichkeit der Interpretation ist, dass wir die Aufgabe auf einem in positiver  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnten Gebiet betrachten. Zur numerischen Berechnung schneidet man dann bei  $z = d$  ab und stellt hier aus obigem Grund eine transparente Randbedingung.

### 3 Skalierung für Asymptotik langer Wellen und Potentialfunktion

Die Asymptotik langer Wellen  $\lambda \gg h_0$  mit der Wellenlänge  $\lambda$  auf dem Schmelzfilm mit der Dicke  $h = h(z, t)$  und der Skala  $h_0$  wird betrachtet. Die konstante Vorschubgeschwindigkeit des Lasers ist  $u_0$ .

Zunächst führen wir für den Kleinheitsparameter

$$\alpha = \frac{h_0}{\lambda} \quad (3.1)$$

eine Skalierung der Gleichungen bzw. der auftretenden Größen und Argumente durch. Wir schreiben

$$x = h_0 x', \quad z = \frac{h_0}{\alpha} z', \quad t = \frac{h_0}{\alpha u_0} t' \quad (3.2)$$

$$h = h_0 h', \quad p = \rho u_0^2 p', \quad \tau = \rho u_0^2 \tau', \quad v_p = \alpha u_0 v'_p. \quad (3.3)$$

Dies ergibt die Geschwindigkeiten

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(h_0 x')}{d(h_0/(\alpha u_0) t')} = \frac{h_0}{h_0/(\alpha u_0)} \frac{dx'}{dt'} = \alpha u_0 v'_x, \quad (3.4)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d(h_0/\alpha z')}{d(h_0/(\alpha u_0) t')} = \frac{h_0/\alpha}{h_0/(\alpha u_0)} \frac{dz'}{dt'} = u_0 v'_z. \quad (3.5)$$

Durch (3.4) ist auch die Skalierung für  $v_p$  in (3.3) motiviert, da im stationären Fall  $v_p = (v_x)|_{x=0}$  gilt. Weiterhin führen wir eine Potentialfunktion  $\varphi$  der Geschwindigkeiten mit

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi = \varphi(x, z, t) \quad (3.6)$$

ein, so dass (2.1) identisch erfüllt ist und skalieren diese durch

$$\varphi = u_0 h_0 \varphi'. \quad (3.7)$$

Damit lautet die Aufgabe: Löse die Impulsbilanzen der Navier-Stokes-Gleichung in zwei Raumdimensionen für die Potentialfunktion  $\varphi'(x', z', t')$ , den Druck  $p'(x', z', t')$  in der Schmelze und die Schmelzfilmdicke  $h' = h'(z', t')$  der Form

$$\alpha^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t' \partial z'} + \frac{\partial \varphi'}{\partial z'} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x' \partial z'} - \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\alpha}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^3 \varphi'}{\partial x'^2 \partial z'} + \alpha^2 \frac{\partial^3 \varphi'}{\partial z'^3} \right], \quad (3.8)$$

$$\alpha \left( -\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t' \partial x'} - \frac{\partial \varphi'}{\partial z'} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z' \partial x'} \right) = \alpha \left( -\frac{\partial p'}{\partial z'} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^3 \varphi'}{\partial x'^3} + \alpha^2 \frac{\partial^3 \varphi'}{\partial z'^2 \partial x'} \right] \quad (3.9)$$

mit den Randbedingungen

1. An einer Absorptionsfront bzw. der Oberfläche  $x' = h'(z', t')$  des Schmelzfilms mit der Dicke  $h'(z', t')$  gilt

(a)

$$p' - p'_g = \left( \frac{2\alpha}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x' \partial z'} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} \frac{\partial h'}{\partial z'} \right] - \frac{2\alpha^3}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} \frac{\partial h'}{\partial z'} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z' \partial x'} \left( \frac{\partial h'}{\partial z'} \right)^2 \right] \right) \left[ 1 + \alpha^2 \frac{\partial h'}{\partial z'} \right]^{-1} \quad (3.10)$$

$$- W \frac{\partial^2 h'}{\partial z'^2} \left( 1 + \alpha^2 \left( \frac{\partial h'}{\partial z'} \right)^2 \right)^{-3/2}, \quad (3.11)$$

$$\tau'_g = - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} \left[ 1 - \alpha^2 \left( \frac{\partial h'}{\partial z'} \right)^2 \right] \left[ 1 + \alpha^2 \left( \frac{\partial h'}{\partial z'} \right)^2 \right]^{-1} \quad (3.12)$$

$$+ \frac{\alpha^2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} \left[ 1 - \alpha^2 \left( \frac{\partial h'}{\partial z'} \right)^2 \right] + 4 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z' \partial x'} \frac{\partial h'}{\partial z'} \right) \left[ 1 + \alpha^2 \left( \frac{\partial h'}{\partial z'} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (3.13)$$

Hierbei sind die kinematische Viskosität  $\nu = \eta/\rho$ , die Reynoldszahl  $\text{Re} = u_0 h_0 / \nu$  und der Parameter

$$W = \frac{\alpha^2 \sigma}{\rho u_0^2 h_0} = \begin{cases} 0, & \sigma = 0, \\ \frac{\alpha^2}{\text{We}}, & \sigma \neq 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

eingeführt, wobei  $\text{We} = \rho u_0^2 h_0 / \sigma$  die Weberzahl bezeichnet. Es sei angemerkt, dass die Weberzahl  $\text{We}$  die Größenordnung  $\alpha^2$  hat, und  $W$  daher die Ordnung  $O(1)$  besitzt (vgl. Hung et al. [3]).

(b) Die kinematische Randbedingung in der neuen Skalierung lautet

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} - \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \frac{\partial h'}{\partial z'} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z'} \quad (3.15)$$

mit  $h'(z' = 0, t') = 0$ .

2. An einer ebenen Schmelzfront  $\partial\Gamma_m$ , d.h. für  $x' = 0$ ,  $z' \geq 0$ , gilt

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z'} = v'_p, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} = 0. \quad (3.16)$$

## 4 Herleitung einer Gleichung für die Schmelzfilmdicke

Im Folgenden werden wir die Aufgabenstellung bzgl. der umskalierten (mit einem Strich) versehenen Größen weiter umformulieren. Zur Vereinfachung lassen wir von nun an die Striche weg.

### 4.1 Vorbemerkung

Wir werden zeigen, dass die gesamte Aufgabe (3.8) – (3.16) auf eine Bewegungsgleichung *nur* für die Schmelzfilmdicke  $h(z, t)$  der Form

$$\frac{\partial h(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = 0, \quad \Phi(z, t) := \varphi(x = h(z, t), z, t), \quad h(z = 0, t) = 0 \quad (4.1)$$

zurückzuführen ist. Dabei wird benutzt, dass die Schmelzströmung bzw. das Potential  $\varphi$  auf einer Zeitskala relaxiert, die klein ist im Vergleich zur Zeitskala mit der sich die Schmelzfilmdicke ändert.

Man beachte, dass (4.1) eine nichtlineare partielle Differentialgleichung in  $h$  ist. Diese kann eine relativ komplizierte Struktur besitzen. Denn wie wir gleich zeigen werden, kann  $\varphi$  Kombinationen von zeitlichen und räumlichen partiellen Ableitung von  $h$  enthalten. Daher ist (4.1) nicht besonders hilfreich, die Struktur der Gleichung zu erkennen. Zur übersichtlicheren Darstellung werden wir daher auch eine zweite Formulierung angeben, in der die Terme nach den auftretenden Ableitungen in  $h$  sortiert sind. Es ergibt sich eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial h}{\partial t} + A(h) \frac{\partial h}{\partial z} + C(h) \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} + E(h) \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + F(h) = 0. \quad (4.2)$$

Die Herleitung basiert auf der näherungsweise Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mit Hilfe der Störungstheorie und verläuft in 3 Schritten. Zunächst entwickeln wir die Aufgabe (3.8) – (3.16) bzgl.

des Parameters  $\alpha$ . Damit können wir  $\varphi(x, z, t)$  und  $p(x, z, t)$  in beliebiger Ordnung bzgl.  $\alpha$  bestimmen. Zuletzt können wir diese Darstellungen an der Schmelzfilmoberfläche auswerten und in die kinematische Randbedingung (3.15) einsetzen. Die Äquivalenz zur Darstellung (4.1) ist einzusehen durch Ausnutzen der Kettenregel

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Man beachte, dass nach Lösen der Bewegungsgleichung für die Schmelzfilmdicke  $h(z, t)$  das Potential  $\varphi$  und der Druck  $p$  daraus bestimmt werden können. Das Lösen der Navier-Stokes Gleichungen ist also nicht mehr notwendig.

## 4.2 Formulierung im allgemeinen Fall

Die Bewegungsgleichung der Schmelzfilmdicke in der Form (4.1) ist durch

$$\Phi = \Phi(z, t) = (\varphi_0 + \alpha \varphi_1) |_{x=h} = \Phi_0 + \Phi_2 h^2 + \Phi_3 h^3 + \Phi_4 h^4 + \Phi_5 h^5 + \Phi_W h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial z^3}, \quad (4.3)$$

$$\Phi_0 = \Phi_0(z, t), \quad \Phi_2 = \Phi_2(z, t), \dots, \Phi_5 = \Phi_5(z, t), \quad h = h(z, t), \quad (4.4)$$

$$\Phi_0 = \int_0^z v_p(y, t) dy, \quad \Phi_2 = -\frac{\text{Re}}{2} \tau_g, \quad \Phi_3 = -\frac{1}{3} \alpha \tilde{k}_0, \quad (4.5)$$

$$\Phi_4 = -\frac{5}{24} \alpha k_1, \quad \Phi_5 = -\frac{3}{20} \alpha k_2, \quad \Phi_W = -\alpha \frac{\text{Re}}{3} W \quad (4.6)$$

mit den Abkürzungen

$$k_0 = \tilde{k}_0 + \text{Re} W \frac{\partial^3 h}{\partial z^3}, \quad \tilde{k}_0 = -\text{Re} \left( \frac{\partial p_g}{\partial z} + v_p \text{Re} \tau_g \right), \quad (4.7)$$

$$k_1 = -\text{Re}^2 \frac{\partial \tau_g}{\partial t}, \quad k_2 = -\frac{\text{Re}^3}{2} \tau_g \frac{\partial \tau_g}{\partial z} = -\frac{\text{Re}^3}{4} \frac{\partial}{\partial z} (\tau_g^2), \quad (4.8)$$

$$p_g = p_g(z, t), \quad \tau_g = \tau_g(z, t), \quad v_p = v_p(z, t), \quad \alpha = \frac{h_0}{\lambda} \quad (4.9)$$

gegeben. In der Formulierung (4.2) ergeben sich die Funktionen

$$A(h) = -2\Phi_2 h - 3\Phi_3 h^2 - 4\Phi_4 h^3 - 5\Phi_5 h^4, \quad (4.10)$$

$$C(h) = -\Phi_W h^3, \quad E(h) = -3\Phi_W h^2, \quad (4.11)$$

$$F(h) = -\Phi_{0,z} - \Phi_{2,z} h^2 - \Phi_{3,z} h^3 - \Phi_{4,z} h^4 - \Phi_{5,z} h^5. \quad (4.12)$$

Eine formale Lösung für das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \varphi(x, z, t) = \varphi_0 + \alpha \varphi_1$$

und den Druck

$$p = p(x, z, t) = p_0 + \alpha p_1$$

ist dann durch

$$\varphi_0 = -\frac{\text{Re}}{2} \tau_g x^2 + \int_0^z v_p(y, t) dy, \quad p_0 = p_g - W \frac{\partial^3 h}{\partial z^3}, \quad (4.13)$$

$$\varphi_1 = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2, \quad p_1 = \frac{\partial \tau_g}{\partial z} (h - x) - 2 \frac{\partial}{\partial z} (\tau_g h) \quad (4.14)$$

mit den Abkürzungen

$$a = \frac{k_2}{60}, \quad b = \frac{k_1}{24}, \quad c = \frac{k_0}{6}, \quad d = -\frac{1}{6} k_2 h^3 - \frac{1}{4} k_1 h^2 - \frac{1}{2} k_0 h \quad (4.15)$$

gegeben. Daraus lassen sich die Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_z$  bestimmen zu

$$v_x(x, z, t) = \alpha \frac{\partial a}{\partial z} x^5 + \alpha \frac{\partial b}{\partial z} x^4 + \alpha \frac{\partial c}{\partial z} x^3 + \left( \alpha \frac{\partial d}{\partial z} - \frac{\text{Re}}{2} \left( \frac{\partial \tau_g}{\partial z} \right) \right) x^2 + v_p, \quad (4.16)$$

$$v_z(x, z, t) = -5\alpha ax^4 - 4\alpha bx^3 - 3\alpha cx^2 - (2\alpha d - \text{Re} \tau_g) x. \quad (4.17)$$

### 4.3 Herleitung der Gleichung für die Schmelzfilmdicke

Die Herleitung erfolgt in den am Anfang des Kapitels angesprochenen drei Schritten.

#### 4.3.1 Entwicklung der Aufgabe nach dem Kleinheitsparameter

Die Aufgabe (3.8) – (3.16) wird nach dem Kleinheitsparameter  $\alpha$  für den Fall langer Wellen bis zur zweiten Ordnung entwickelt. Wie bereits erwähnt lassen wir ab jetzt die Striche an allen skalierten Größen weg. Die Differentialgleichungen (3.8) und (3.9) kann man dann schreiben als

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\alpha}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} \right] + O[\alpha^2], \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = \alpha \text{Re} \left[ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right] + O[\alpha^2]. \quad (4.19)$$

Als Randbedingungen an der Absorptionsfront  $x = h(z, t)$  erhält man aus (3.10) und (3.12)

$$p = p_g + \frac{2\alpha}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial z} \right] \left[ 1 + \alpha^2 \frac{\partial h^2}{\partial z} \right]^{-1} - W \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \left( 1 + \alpha^2 \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right)^{-3/2} + O[\alpha^3] \quad (4.20)$$

$$= p_g - W \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{2\alpha}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial z} \right] + O[\alpha^2], \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left[ -\text{Re} \tau_g \left[ 1 + \alpha^2 \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] + \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \left[ 1 - \alpha^2 \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] + 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right] \left[ 1 - \alpha^2 \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \quad (4.22)$$

$$= -\text{Re} \tau_g + O[\alpha^2] \quad (4.23)$$

sowie die unveränderte kinematische Randbedingung (3.15)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad h(z=0, t) = 0. \quad (4.24)$$

An der Schmelzfront  $x = 0$  gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_p, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (4.25)$$

Mit dem Ansatz

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha \varphi_1, \quad p = p_0 + \alpha p_1 \quad (4.26)$$

werden wir nun durch Vergleich der Terme mit gleicher Ordnung in  $\alpha$  Darstellungen für  $\varphi$  und  $p$  herleiten.

#### 4.3.2 Bestimmung von Druck, Potential und Geschwindigkeiten

**Druck und Potential in der Ordnung  $\alpha^0$ :** Aus der Differentialgleichung (4.18) sowie der Randbedingung (4.21) erhält man wegen (4.26) durch Sortieren der Terme mit Ordnung  $\alpha^0$

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = 0, \quad p|_{x=h} = p_g - W \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}. \quad (4.27)$$

Dies ergibt für den Druck in der Ordnung  $\alpha^0$  die Darstellung

$$p_0(x, z, t) = p_g(z, t) - W \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}. \quad (4.28)$$

Analog erhalten wir für  $\varphi_0$  aus (4.18), (4.23) und (4.25) die Bedingungen

$$\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} |_{x=h} = -\text{Re} \tau_g, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} |_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} |_{x=0} = v_p, \quad (4.29)$$

woraus für das Potential in der Ordnung  $\alpha^0$  folgt, dass

$$\varphi_0(x, z, t) = -\frac{\text{Re} \tau_g(z, t)}{2} x^2 + \int_0^z v_p(y, t) dy. \quad (4.30)$$

Damit ist (4.13) gezeigt.



**Druck und Potential in der Ordnung  $\alpha^1$ :** Für die Terme des Drucks  $p$  in erster Ordnung  $\alpha^1$  gilt nach (4.18) und (4.23)

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^2 \partial z} \right] = -\frac{\partial \tau_g(z, t)}{\partial z},$$

$$(p_1)_{|x=h} = \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial z} \right)_{|x=h} = \frac{2}{\text{Re}} \left( -\text{Re} \frac{\partial \tau_g}{\partial z} h - \text{Re} \tau_g \frac{\partial h}{\partial z} \right) = -2 \frac{\partial(\tau_g h)}{\partial z}.$$

Damit erhält man

$$p_1(x, z, t) = \frac{\partial \tau_g(z, t)}{\partial z} (h - x) - 2 \frac{\partial(\tau_g h)}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_g(z, t)}{\partial z} (h + x) - 2 \tau_g \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.31)$$

als Korrektur zum Außendruck  $p_g$ , womit der rechte Teil in (4.14) gezeigt ist. Für die erste Ordnung  $\alpha^1$  des Potentials  $\varphi_1$  ist nach (4.19)

$$\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} = \text{Re} \left[ -\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z \partial x} \right] = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 \quad (4.32)$$

mit

$$k_0 = \text{Re} \left( -\frac{\partial p_g}{\partial z} + W \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} - \text{Re} \tau_g v_p \right), \quad k_1 = -\text{Re}^2 \frac{\partial \tau_g}{\partial t}, \quad k_2 = -\frac{\text{Re}^3}{2} \tau_g \frac{\partial \tau_g}{\partial z} = -\frac{\text{Re}^3}{4} \frac{\partial}{\partial z} (\tau_g^2). \quad (4.33)$$

Mit dem Ansatz

$$\varphi_1(x, z, t) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \quad (4.34)$$

folgt aus Gl. (4.32), dass

$$k_0 + k_1 x + k_2 x^2 = \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} = 60ax^2 + 24bx + 6c \quad (4.35)$$

und somit

$$a = \frac{1}{60} k_2, \quad b = \frac{1}{24} k_1, \quad c = \frac{1}{6} k_0. \quad (4.36)$$

Ferner folgt aus der Randbedingung (4.25), dass

$$0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{x=0} = f_z, \quad 0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = e. \quad (4.37)$$

Mit  $f_z = 0$  ist  $f$  konstant und fällt bei Differentiationen weg. Da  $\varphi_1$  im Folgenden stets in differenzierter Form betrachtet wird, um daraus die Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_z$  zu berechnen sowie die Bewegungsgleichung (4.1) aufzustellen, kann  $f$  gleich Null gesetzt werden. Letzendlich kann  $d$  aus der Randbedingung (4.23) abgelesen werden. Es ergibt sich

$$0 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \Big|_{x=h} = 20ah^3 + 12bh^2 + 6ch + 2d \Rightarrow d = -\frac{k_2}{6} h^3 - \frac{k_1}{4} h^2 - \frac{k_0}{2} h. \quad (4.38)$$

Somit ist  $\varphi_1$  in der Darstellung (4.14) bestimmt.

**Geschwindigkeiten:** Die Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_z$  können direkt aus  $\varphi = \varphi_0 + \alpha \varphi_1$  gewonnen werden. Mit

$$v_x(x, z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \varphi(x, z, t) = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_0 + \alpha \varphi_1), \quad v_z(x, z, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, z, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_0 + \alpha \varphi_1)$$

sind (4.16) und (4.17) gezeigt.

### 4.3.3 Die Bewegungsgleichung

Die Funktion  $\Phi$  ergibt sich wegen

$$(\varphi_0)_{|x=h} = -\frac{\text{Re}}{2} \tau_g h^2 + \int_0^z v_p(y, t) dy, \quad (4.39)$$

$$(\varphi_1)_{|x=h} = ah^5 + bh^4 + ch^3 + dh^2 = -\frac{3}{20} k_2 h^5 - \frac{5}{24} k_1 h^4 - \frac{1}{3} k_0 h^3 \quad (4.40)$$

zu

$$\Phi = (\varphi_0 + \alpha \varphi_1)_{|x=h} = -\frac{\text{Re}}{2} \tau_g h^2 + \int_0^z v_p(y, t) dy + \alpha \left( -\frac{3}{20} k_2 h^5 - \frac{5}{24} k_1 h^4 - \frac{1}{3} k_0 h^3 \right),$$

woraus sich mit Hilfe von (4.7) und (4.8) die Darstellung (4.3) – (4.6) für  $\Phi$  ablesen lässt. Aus

$$\begin{aligned} \Phi_z = & (2\Phi_2 h + 3\Phi_3 h^2 + 4\Phi_4 h^3 + 5\Phi_5 h^4) h_z + (\Phi_{0,z} + \Phi_{2,z} h^2 + \Phi_{3,z} h^3 + \Phi_{4,z} h^4 + \Phi_{5,z} h^5) \\ & + \Phi_W h^3 h_{zzzz} + 3\Phi_W h^2 h_z h_{zzz} \end{aligned}$$

ergeben sich die Funktionen  $A(h)$ ,  $C(h)$ ,  $E(h)$  und  $F(h)$  in (4.10) – (4.12) für die Aufgabe (4.2).

### 4.3.4 Abschlussbemerkung zu den Randbedingungen

Wie oben zu sehen ist, ist die Aufgabe (3.8) – (3.16), bzw. äquivalent dazu die Aufgabe (4.1), mit beliebiger Anfangsbedingung für  $h(z=0, t)$ , bereits ausreichend spezifiziert, d.h. es sind genau ausreichend viele Randbedingungen gestellt. Daher sind am unteren Rand des Berechnungsgebietes keine Randbedingungen zu stellen. Genauer gesagt sind die Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_z$  an den Rändern  $z=0$  und  $z=d$  durch das Potenzial  $\varphi$  in erster Ordnung vorgegeben und lassen sich direkt aus (4.16) und (4.17) ablesen.

## 4.4 Spezialfall: konstante Scherspannung und Druck

Für den Fall, dass  $\tau_g$  und  $p_g$  konstant sind, geben wir nun die Aufgabenstellung sowie die aus der Lösung resultierenden Größen Druck  $p$ , Potential  $\varphi$  und die Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_z$  für die Entwicklung in  $\alpha$  bis zu erster Ordnung an. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} k_0 = \tilde{k}_0 + \text{Re} W \frac{\partial^3 h}{\partial z^3}, \quad \tilde{k}_0 = -\text{Re}^2 \tau_g v_p, \quad k_1 = k_2 = 0, \\ a = b = 0, \quad c = \frac{\text{Re}}{6} \left( -\text{Re} \tau_g v_p + W \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} \right), \quad d = -\frac{k_0}{2} h = \frac{\text{Re}}{2} \left( \text{Re} \tau_g v_p - W \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} \right) h. \end{aligned}$$

Somit bekommt man

$$\begin{aligned} \varphi_0 = -\frac{\text{Re}}{2} \tau_g x^2 + \int_0^z v_p(y, t) dy \quad p_0 = p_g - W \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}, \\ \varphi_1 = \frac{\text{Re}}{6} \left( -\text{Re} \tau_g v_p + W \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} \right) x^3 + \frac{\text{Re}}{2} \left( \text{Re} \tau_g v_p - W \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} \right) hx^2, \quad p_1 = -2\tau_g h_z \end{aligned}$$

und daraus die Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} v_x(x, z, t) = \alpha c_z x^3 + \alpha d_z x^2 + v_p \\ = \alpha \frac{\text{Re}}{6} (-\text{Re} \tau_g (v_p)_z + W h_{zzzz}) x^3 + \alpha \left( \frac{\text{Re}^2}{2} \tau_g (v_p)_z - \frac{\text{Re}}{2} W h_{zzzz} \right) hx^2 - \frac{\text{Re}}{2} \alpha W h_z h_{zzz} x^2 \\ + \alpha \frac{\text{Re}^2}{2} \tau_g v_p h_z x^2 + v_p, \\ v_z(x, z, t) = -3\alpha c x^2 - (2\alpha d - \text{Re} \tau_g) x = \alpha \frac{\text{Re}}{2} (\text{Re} \tau_g v_p - W h_{zzz}) x^2 - [\alpha \text{Re} (\text{Re} \tau_g v_p - W h_{zzz}) - \text{Re} \tau_g] x. \end{aligned}$$

Für die Formulierung der Aufgabe ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \int_0^z v_p(y, t) dy, \quad \Phi_2 = -\frac{\text{Re}}{2} \tau_g, \quad \Phi_3 = \alpha \frac{\text{Re}^2}{3} \tau_g v_p, \quad \Phi_4 = \Phi_5 = 0, \quad \Phi_W = -\alpha \frac{\text{Re}}{3} W, \\ A(h) = \text{Re} \tau_g h - \alpha \text{Re}^2 \tau_g v_p h^2, \quad C(h) = \alpha \frac{\text{Re}}{3} W h^3, \quad E(h) = \alpha \text{Re} W h^2, \quad F(h) = -v_p - \alpha \frac{\text{Re}^2}{3} \tau_g \frac{\partial v_p}{\partial z} h^3 \end{aligned}$$

und damit in der Form (4.2) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (\operatorname{Re}\tau_g h - \alpha \operatorname{Re}^2 \tau_g v_p h^2) \frac{\partial h}{\partial z} + \alpha \frac{\operatorname{Re}}{3} W h^3 \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} + \alpha \operatorname{Re} W h^2 \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} = v_p + \alpha \frac{\operatorname{Re}^2}{3} \tau_g \frac{\partial v_p}{\partial z} h^3. \quad (4.41)$$

Für den Fall auch konstanten Einströmens erhält man

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (\operatorname{Re}\tau_g h - \alpha \operatorname{Re}^2 \tau_g v_p h^2) \frac{\partial h}{\partial z} + \alpha \frac{\operatorname{Re}}{3} W h^3 \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} + \alpha \operatorname{Re} W h^2 \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} = v_p. \quad (4.42)$$

Betrachtet man die Aufgabe (4.41) nur bis zur Ordnung  $\alpha^0$ , ergibt sich

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{Re}\tau_g h \frac{\partial h}{\partial z} = v_p. \quad (4.43)$$

## 5 Analyse der Gleichung für die Schmelzfilmdicke

Wir wollen nun die Gleichung (4.2) für den Verlauf der Schmelzfilmdicke genauer analysieren. Insbesondere soll eine Stabilitätsanalyse durchgeführt werden.

### 5.1 Vorbemerkungen

Im gesamten Kapitel werden wir den unteren Index  $t$  bzw.  $z$  für die partielle Ableitung nach  $t$  bzw.  $z$  benutzen.

#### 5.1.1 Entwicklung um eine stationäre Lösung

Wie im letzten Abschnitt gezeigt liefert eine Entwicklung der Aufgabe für die Schmelzfilmdicke  $h = h(z, t)$  bis zur ersten Ordnung die Gleichung

$$h_t + A(h)h_z + C(h)h_{zzzz} + E(h)h_z h_{zzz} + F(h) = 0, \quad (5.1)$$

wobei  $A$ ,  $C$ ,  $E$  und  $F$  gegeben sind durch

$$A(h) = \sum_{k=0}^4 a_k h^k, \quad C(h) = \frac{1}{3} \alpha \operatorname{Re} W h^3, \quad E(h) = \alpha \operatorname{Re} W h^2, \quad F(h) = \sum_{k=0}^5 f_k h^k$$

mit bzgl.  $h$  unabhängigen Koeffizienten  $a_k$  und  $f_k$ . Bezeichne  $h_s = h_s(z)$  eine stationäre Lösung von (5.1), d.h. es gilt

$$A(h_s)h_s'(z) + C(h_s)h_s'''' + E(h_s)h_s' h_s''' + F(h_s) = 0. \quad (5.2)$$

Für eine Störungsanalyse suchen wir eine Lösung  $h = h(z, t, \varepsilon)$  der Anfangswertaufgabe (AWA)

$$h_t + A(h)h_z + F(h) = 0, \quad h(z, 0, \varepsilon) = h_s(z) + \varepsilon g(z). \quad (5.3)$$

Hierbei bezeichnet  $g(z)$  die Anfangsstörung und  $\varepsilon > 0$  den Störungsparameter, der die Anfangsamplitude der Störung darstellt. Wir entwickeln die Lösung  $h$  von (5.3) um die stationäre Lösung  $h_s$ , d.h. wir definieren eine Funktion  $\eta = \eta(z, t)$  durch

$$h(z, t) = h_s(z) + \varepsilon \eta(z, t). \quad (5.4)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} C(h) &= C(h_s + \varepsilon \eta) = -\Phi_w(h_s + \varepsilon \eta)^3 = -\Phi_w(h_s^3 + 3\varepsilon \eta h_s^2 + 3\varepsilon^2 \eta^2 h_s + \varepsilon^3 \eta^3) = C(h_s) + \varepsilon \tilde{C}(h_s, \eta, \varepsilon), \\ E(h) &= E(h_s + \varepsilon \eta) = -3\Phi_w(h_s + \varepsilon \eta)^2 = -3\Phi_w(h_s^2 + 2\varepsilon \eta h_s + \varepsilon^2 \eta^2) = E(h_s) + \varepsilon \tilde{E}(h_s, \eta, \varepsilon) \end{aligned}$$

mit Funktionen

$$\begin{aligned} \tilde{C}(h_s, \eta, \varepsilon) &= -\Phi_w(3\eta h_s^2 + 3\varepsilon \eta^2 h_s + \varepsilon^2 \eta^3) = \frac{\alpha \operatorname{Re} W}{3} (3\eta h_s^2 + 3\varepsilon \eta^2 h_s + \varepsilon^2 \eta^3), \\ \tilde{E}(h_s, \eta, \varepsilon) &= -3\Phi_w(2\eta h_s + \varepsilon \eta^2) = \alpha \operatorname{Re} W (2\eta h_s + \varepsilon \eta^2). \end{aligned}$$

Somit lässt sich  $C$  als Summe von  $C(h_s)$  und Termen in der Ordnung  $O(\varepsilon)$  schreiben. Gleiches gilt auch für  $E$  und auch für  $A$  sowie für  $F$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} A(h) &= A(h_s + \varepsilon\eta) = \sum_{k=0}^4 a_k (h_s + \varepsilon\eta)^k = \sum_{k=0}^4 a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} h_s^j (\varepsilon\eta)^{k-j} = \sum_{k=0}^4 a_k \left( \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} h_s^j (\varepsilon\eta)^{k-j} + h_s^k \right) \\ &= A(h_s) + \sum_{k=0}^4 a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} h_s^j (\varepsilon\eta)^{k-j} = A(h_s) + \varepsilon\eta \sum_{k=1}^4 a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} h_s^j (\varepsilon\eta)^{k-1-j} = A(h_s) + \varepsilon\tilde{A}(h_s, \eta, \varepsilon) \end{aligned}$$

und analog

$$F(h) = F(h_s + \varepsilon\eta) = F(h) + \varepsilon\eta \sum_{k=1}^5 f_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} h_s^j (\varepsilon\eta)^{k-1-j} = F(h_s) + \varepsilon\tilde{F}(h_s, \eta, \varepsilon)$$

mit Funktionen

$$\begin{aligned} \tilde{A}(h_s, \eta, \varepsilon) &= \eta \sum_{k=1}^4 a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} h_s^j (\varepsilon\eta)^{k-1-j} \\ &= \eta [a_1 + a_2(\varepsilon\eta + 2h_s) + a_3((\varepsilon\eta)^2 + 3h_s\varepsilon\eta + 3h_s^2) + a_4((\varepsilon\eta)^3 + 4h_s(\varepsilon\eta)^2 + 6h_s^2\varepsilon\eta + 4h_s^3)], \\ \tilde{F}(h_s, \eta, \varepsilon) &= \eta \sum_{k=1}^5 f_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} h_s^j (\varepsilon\eta)^{k-1-j} \\ &= \eta [f_1 + f_2(\varepsilon\eta + 2h_s) + f_3((\varepsilon\eta)^2 + 3h_s\varepsilon\eta + 3h_s^2) + f_4((\varepsilon\eta)^3 + 4h_s(\varepsilon\eta)^2 + 6h_s^2\varepsilon\eta + 4h_s^3) \\ &\quad + f_5((\varepsilon\eta)^4 + 5h_s(\varepsilon\eta)^3 + 10h_s^2(\varepsilon\eta)^2 + 10h_s^3\varepsilon\eta + 5h_s^4)]. \end{aligned}$$

Einsetzen von (5.4) in die Gleichung für die Schmelzfilmdicke (5.1) und Ausnutzen von (5.2) ergibt daher

$$\begin{aligned} 0 &= (h_s + \varepsilon\eta)_t + A(h_s + \varepsilon\eta)(h_s + \varepsilon\eta)_z + C(h_s + \varepsilon\eta)(h_s + \varepsilon\eta)_{zzzz} + E(h_s + \varepsilon\eta)(h_s + \varepsilon\eta)_z(h_s + \varepsilon\eta)_{zzz} + F(h_s + \varepsilon\eta) \\ &= \varepsilon\eta_t + A(h_s + \varepsilon\eta)(h_s' + \varepsilon\eta_z) + C(h_s + \varepsilon\eta)(h_s'''' + \varepsilon\eta_{zzzz}) + E(h_s + \varepsilon\eta)(h_s' + \varepsilon\eta_z)(h_s'' + \varepsilon\eta_{zzz}) + F(h_s + \varepsilon\eta) \\ &= \varepsilon\eta_t + (A(h_s) + \varepsilon\tilde{A}(h_s, \eta, \varepsilon))(h_s' + \varepsilon\eta_z) + (C(h_s) + \varepsilon\tilde{C}(h_s, \eta, \varepsilon))(h_s'''' + \varepsilon\eta_{zzzz}) \\ &\quad + (E(h_s) + \varepsilon\tilde{E}(h_s, \eta, \varepsilon))(h_s' + \varepsilon\eta_z)(h_s'' + \varepsilon\eta_{zzz}) + (F(h_s) + \varepsilon\tilde{F}(h_s, \eta, \varepsilon)) \\ &= \varepsilon\eta_t + \varepsilon [ \tilde{A}(h_s, \eta, \varepsilon)h_s' + (A(h_s) + \varepsilon\tilde{A}(h_s, \eta, \varepsilon))\eta_z ] + \varepsilon [ \tilde{C}(h_s, \eta, \varepsilon)h_s'''' + (C(h_s) + \varepsilon\tilde{C}(h_s, \eta, \varepsilon))\eta_{zzzz} ] \\ &\quad + \varepsilon [ \tilde{E}(h_s, \eta, \varepsilon)h_s'h_s'' + (E(h_s) + \varepsilon\tilde{E}(h_s, \eta, \varepsilon))(h_s''\eta_z + h_s'\eta_{zzz} + \varepsilon\eta_z\eta_{zzz}) ] + \varepsilon\tilde{F}(h_s, \eta, \varepsilon). \end{aligned}$$

Nach Teilen durch  $\varepsilon$  sieht man, dass  $\eta$  die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\eta_t + [A + \varepsilon\tilde{A} + h_s''''(E + \tilde{E})]\eta_z + h_s' [E + \varepsilon\tilde{E}]\eta_{zzz} + [C + \varepsilon\tilde{C}]\eta_{zzzz} + \varepsilon [E + \varepsilon\tilde{E}]\eta_z\eta_{zzz} \quad (5.5)$$

$$+ \tilde{A}h_s' + \tilde{C}h_s'''' + \tilde{E}h_s'h_s'' + \tilde{F} = 0, \quad (5.6)$$

wobei die Funktionen  $A$ ,  $\tilde{A}$ ,  $C$ ,  $\tilde{C}$ ,  $E$ ,  $\tilde{E}$ ,  $F$ ,  $\tilde{F}$  an der stationären Lösung  $h_s$  auszuwerten sind. Der Anfangswert

$$\eta(z, 0) = g(z) \quad (5.7)$$

ergibt sich durch Vergleich mit dem Anfangswert in (5.3). Die Funktion  $\eta(z, t)$  beschreibt also den Verlauf der Anfangsstörung  $g(z)$ .

Da die Gleichung (5.4) linear in  $\varepsilon$  ist, ist dies zunächst eine lineare Stabilitätsanalyse. Schreibt man jedoch weiter

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \dots, \quad (5.8)$$

sieht man, dass man je nach Ordnung der Entwicklung von  $\eta$  in (5.8) auch  $h$  um  $h_s$  in beliebiger Ordnung entwickeln kann und somit eine nichtlineare Stabilitätsanalyse durchführen kann. Der Ansatz in (5.8) kann auch dafür benutzt werden, eine Lösung für  $\eta$  zu finden, indem man diese Form in die Gleichung einsetzt und nach Termen in gleicher Ordnung von  $\varepsilon$  sortiert, um sukzessiv  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  usw. zu bestimmen. Dieses Vorgehen werden wir im Folgenden genauer analysieren.

### 5.1.2 Verschiedene Einströmsituationen: Wasserhahn und Schmelzströmung

Für die weiteren Untersuchungen teilen wir das Berechnungsgebiet in  $z$ -Richtung an der Stelle  $z=z_0$  auf, vgl. hierzu auch Abbildung 2.1. Es ist zu beachten, dass wir hier schon die Gleichungen in skalierten Variablen betrachten, d.h. die Blechunterseite entspricht der  $z$ -Position 1.

Wir untersuchen zunächst noch einmal die Geschwindigkeit  $v_x$  und  $v_z$  aus (4.16),(4.17). Für  $\alpha \ll 1$  hat man

$$v_x(x, z, t) \approx v_p(z, t) - \frac{\operatorname{Re} \partial \tau_g(z, t)}{2} \frac{\partial}{\partial z} x^2, \quad v_z(x, z, t) \approx \operatorname{Re} \tau_g(z, t) x. \quad (5.9)$$

Bei nur kleinen Änderungen der Scherspannung entspricht die Geschwindigkeit der Schmelze in  $x$ -Richtung demnach in etwa der Einströmgeschwindigkeit. Nahe der Schmelzfront, d.h. insbesondere für kleine Schmelzfilmdicken, die im oberen Bereich  $z \in [0, z_0]$  des Bleches vorherrschen, ist laut (5.9) die Geschwindigkeit in  $z$ -Richtung klein. Anders gesagt bestimmt hier also das Einströmen das Verhalten der Schmelze. Hier sprechen wir von einer *Schmelzströmung*.

Im unteren Bereich  $z \in [z_0, 1]$  hingegen ist die Schmelzfilmdicke nahe 1, d.h. insbesondere nahe der Oberfläche ist auch die Geschwindigkeit in  $z$ -Richtung nicht mehr zu vernachlässigen. Um diesen Effekt genauer zu untersuchen, betrachten wir eine neue Aufgabe, bei der wir das Einströmen vernachlässigen, d.h. es gilt  $v_p \equiv 0$ . Da die Teilchen hierbei von oberhalb des Bereichs  $z \in [z_0, 1]$  kommen, ist es sinnvoll, die neue Aufgabe nicht nur auf dem unteren Bereich sondern auf einem in  $-z$ -Richtung unendlich ausgedehnten Gebiet zu formulieren. Wie weiter oben bereits bemerkt wurde, ist es für die Analyse sinnvoll, das Gebiet auch in positiver  $z$ -Richtung unendlich weit auszudehnen. Wir betrachten also  $z \in \mathbb{R}$  und nennen das Modell *Wasserhahn*. Der Name kommt daher, dass wie gesagt kein Material seitlich einströmt, sondern wir das Verhalten der Strömung „von oben nach unten“ untersuchen.

Zur Vereinfachung der Darstellungen gehen wir bei der weiteren Analyse von konstantem Druck sowie konstanter Scherspannung aus, normieren  $\tau_g = p_g = 1$  und setzen  $\operatorname{Re} = 1$ .

## 5.2 Wasserhahn

Zunächst wird das Wasserhahnmodell betrachtet, d.h. wegen  $v_p \equiv 0$  erhalten wir aus (4.41) die AWA

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial z} + \alpha \frac{1}{3} W h^3 \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} + \alpha W h^2 \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} = 0, \quad h(z, 0) = h_a(z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (5.10)$$

wobei  $h_a$  eine auf  $\mathbb{R}$  gegebene Anfangsverteilung ist. Für die Stabilitätsanalyse betrachten wir eine Anfangsverteilung, die von einem stationären Zustand  $h_s = h_s(z)$  aus leicht gestört ist, d.h.

$$h_a(z) = h_s(z) + \varepsilon g(z),$$

wobei  $\varepsilon$  der Störungsparameter und  $g$  eine Anfangsverteilung einer Störung ist. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Störung wellenförmig vorliegt, z.B. in der Form

$$g(z) = \cos(kz + \phi) \quad (5.11)$$

mit der Frequenz  $k$  und der Phasenverschiebung  $\phi$ .

### 5.2.1 Modell ohne Krümmung

Wir beginnen mit der Analyse des Modells ohne Krümmung, d.h. für den Fall  $W=0$ . Die zu untersuchende Aufgabe für die Schmelzfilmdicke  $h = h(z, t)$  lautet

$$h_t + h h_z = 0, \quad h(z, 0) = h_a(z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (5.12)$$

Die Gleichung nennt man die Burgers-Gleichung. Die stationäre Lösung  $h_s = h_s(z)$  hierzu ist einfach

$$h_s = \text{konstant.}$$

Wir normieren  $h_s = 1$  und betrachten daher

$$h_a(z) = 1 + \varepsilon g(z)$$

mit  $g$  aus (5.11). Lösungen hierfür kann man mit verschiedenen Methoden erhalten und sind in diversen Büchern zu finden. Wir stellen an diesem Beispiel einige Methoden vor, die wir später auch für kompliziertere Gleichungen als (5.12) benutzen werden.

**Methode der Charakteristiken:** Zu untersuchen ist die AWA

$$h_t + hh_z = 0, \quad h(z, 0) = h_a(z) = 1 + \varepsilon g(z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (5.13)$$

Die Gleichung ist eine semilineare partielle Differentialgleichung vom hyperbolischen Typ. Wir benutzen die Methode der Charakteristiken, um die Lösung genauer zu analysieren. Dazu definiere man zunächst  $y(t) := h(z(t), t)$ . Dann gilt

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}y = h_z \dot{z} + h_t.$$

Durch Vergleich mit (5.13) sieht man, dass man eine Lösung für (5.13) gefunden hat, wenn man eine Lösung des Systems

$$\dot{y}(t) = 0, \quad y(0) = h_a(z_0), \quad (5.14)$$

$$\dot{z}(t) = y(t), \quad z(0) = z_0 \quad (5.15)$$

gefunden hat, wobei der Anfangswert  $z_0$  später diskutiert wird. Dies ist ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangswerten. Die Lösung für (5.14) mit beliebigem  $z_0$  ist gegeben durch

$$y(t) \equiv h_a(z_0),$$

woraus wir die Lösung

$$z(t) = z(t, z_0) = z_0 + h_a(z_0)t$$

für (5.15) bestimmen. Die Lösung für (5.13) lässt sich durch Elimination von  $z_0$  implizit angeben als

$$h(z, t) = h_a(z - h(z, t)t). \quad (5.16)$$

Der Graph der Funktion  $z(t, z_0)$  beschreibt in einem  $(z, t)$ -Koordinatensystem eine Gerade mit Steigung  $h_a(z_0)$  und  $z$ -Achsen-Abschnitt  $z_0$ . Er wird auch Charakteristik genannt. Entlang einer Charakteristik beschreibt die rechte Seite der DGL den zeitlichen Verlauf der Lösung  $y(t) = h(z(t), t)$ . In unserem Fall ist die Lösung entlang einer Charakteristik also konstant. Angefangen bei einem beliebigen  $z$ -Wert  $z_0$  hat die Lösung  $h$  daher entlang der Geraden  $z(t, z_0)$  immer den Wert  $h(z_0, 0) = h_a(z_0)$ . Dies gilt jedoch nur bis zu einem möglichen Schnittpunkt von 2 Geraden (zu verschiedenen  $z_0$ ). An einem solchen Punkt in der  $(z, t)$ -Ebene tritt eine Unstetigkeitsstelle auf und von da an erfüllt die Lösung die DGL nur noch im schwachen Sinne. Im Folgenden berechnen wir die Schnittpunkte für die Anfangsstörung  $g(z) = \cos(kz + \phi)$ , also  $h_a(z) = 1 + \varepsilon g(z)$ .

Der Schnittpunkt von zwei Charakteristiken  $z(t, z_i)$ ,  $i = 1, 2$ , erfüllt

$$z(t, z_0) = z(t, z_1) \Leftrightarrow z_0 + h_a(z_0)t = z_1 + h_a(z_1)t \Leftrightarrow z_0 + \varepsilon g(z_0)t = z_1 + \varepsilon g(z_1)t.$$

Zunächst sieht man, dass sich für ungestörte Lösungen, d.h.  $\varepsilon=0$ , zwei Charakteristiken für verschiedene  $z_0 \neq z_1$  nicht schneiden. Für  $\varepsilon \neq 0$  schneiden sich jedoch die Charakteristiken in

$$t = -\frac{z_1 - z_0}{\varepsilon(g(z_1) - g(z_0))} =: t_s(z_0, z_1).$$

Die Charakteristiken schneiden sich also für kleine Zeiten, wenn  $z_1$  nahe  $z_0$  ist. Dazu betrachten wir

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_0} t_s(z_0, z_1) = -\frac{1}{\varepsilon g'(z_0)} = \frac{1}{\varepsilon k \sin(kz_0 + \phi)}.$$

Für positive Werte des Sinus gibt es also positive Schnittpunkte, und zwar frühestens bei  $t = O(1/\varepsilon)$ , da  $k = O(1)$ . Obige Lösung aus (5.16) ist auch nur bis zu diesen Schnittpunkten gültig. Da diese Lösung weiterhin nur implizit gegeben ist, werden wir nun einen anderen Ansatz zur Lösung verfolgen.

**Entwicklung um den stationären Zustand:** Wir entwickeln die Lösung um die stationäre Lösung  $h_s=1$  zu (5.12). Die AWA (5.5) – (5.7) für den Verlauf der Störung ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} A(h) &= h, & F(h) &= 0, \\ a_0 &= a_2 = a_3 = a_4 = 0, & a_1 &= 1, & f_0 &= \dots = f_5 = 0, \\ \tilde{A}(h_s, \eta, \varepsilon) &= \eta, & \tilde{F}(h_s, \eta, \varepsilon) &= 0 \end{aligned}$$

zu

$$\eta_t + (1 + \varepsilon\eta)\eta_z = 0, \quad \eta(z, 0) = g(z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (5.17)$$

wobei  $g$  eine Anfangsverteilung für die Störung ist. Im Weiteren versuchen wir, eine Lösung hierfür anzugeben.

**Reguläre Störungstheorie - Lineare Stabilitätsanalyse:** Wir schreiben wie in (5.8)

$$\eta(z, t, \varepsilon) = \eta_0(z, t) + \varepsilon \eta_1(z, t) + \varepsilon^2 \eta_2(z, t) + \dots \quad (5.18)$$

Zunächst lesen wir durch Sortieren der Terme mit gleicher Ordnung in  $\varepsilon$  aus der Anfangsbedingung von (5.5) – (5.7) die Anfangsbedingungen

$$\eta_0(z, 0) = g(z), \quad \eta_k(z, 0) = 0, \quad k \geq 1,$$

für die Funktionen  $\eta_k = \eta_k(z, t)$ ,  $k \geq 0$ , ab. Einsetzen von (5.18) in (5.17) ergibt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= (\eta_0)_t + \varepsilon (\eta_1)_t + \varepsilon^2 (\eta_2)_t + \dots + (1 + \varepsilon (\eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots)) ((\eta_0)_z + \varepsilon (\eta_1)_z + \varepsilon^2 (\eta_2)_z + \dots) \\ &= (\eta_0)_t + (\eta_0)_z + \varepsilon ((\eta_1)_t + (\eta_1)_z + \eta_0 (\eta_0)_z) + \varepsilon^2 ((\eta_2)_t + (\eta_2)_z + \eta_0 (\eta_1)_z + \eta_1 (\eta_0)_z) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Sortieren dieser Gleichung bzgl. der Ordnung von  $\varepsilon$  liefert die AWA

$$(\eta_0)_t + (\eta_0)_z = 0, \quad \eta_0(z, 0) = g(z) \quad (5.19)$$

für die Funktion  $\eta_0$ . Die eindeutige Lösung dieser (so genannten Transport-)Gleichung mit Anfangsverteilung  $g$  lässt sich sofort hinschreiben und lautet

$$\eta_0(z, t) = g(z - t). \quad (5.20)$$

Damit ist die AWA für  $\eta_1$  gegeben durch

$$(\eta_1)_t + (\eta_1)_z = -\eta_0 (\eta_0)_z = -g(z - t) g'(z - t). \quad (5.21)$$

Für die Lösungen dieser AWA lösen wir mit Hilfe der Methode der Charakteristiken zunächst die allgemeine Aufgabe

$$u_t + u_z = f(z, t), \quad u(z, 0) = 0, \quad (5.22)$$

in  $u = u(z, t)$  mit gegebener Funktion  $f = f(z, t)$ . Dazu definiere man wieder  $y(t) := u(z(t), t)$ . Dann gilt

$$\dot{y} = \frac{d}{dt} y = u_z \dot{z} + u_t.$$

Durch Vergleich mit (5.22) sieht man, dass man eine Lösung für (5.22) gefunden hat, wenn man das System

$$\dot{y}(t) = f(z(t), t), \quad y(0) = u(z(0), 0) = 0, \quad (5.23)$$

$$\dot{z}(t) = 1, \quad z(0) = z_0 \quad (5.24)$$

mit dem noch unbestimmten Anfangswert  $z_0$  gelöst hat. Dies ist ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangswerten. Die Lösung für (5.24) mit beliebigem  $z_0$  ist gegeben durch

$$z(t) = z_0 + t, \quad (5.25)$$

woraus wir die Lösung

$$y(t) = \int_0^t f(z_0 + s, s) ds$$

für (5.23) bestimmen. Wir können nun (5.25) nach  $z_0$  auflösen und erhalten  $z_0 = z - t$ . Daher lässt sich das unbekannte  $z_0$  aus der Lösung für  $y(t)$  eliminieren, um folgende Lösung für  $u$  zu erhalten:

$$u(z, t) = \int_0^t f(z - t + s, s) ds.$$

Durch Probe sieht man, dass dieses  $u$  tatsächlich die AWA (5.22) löst. Denn es gilt

$$u_t + u_z = \int_0^t f_z(z(s), s) ds - \int_0^t f_z(z(s), s) ds + f(z, t) = f(z, t), \quad u(z, 0) = 0.$$

Nun lässt sich die Lösung für (5.21) angeben. Wegen

$$f(z, t) = -g(z - t) g'(z - t)$$

gilt

$$f(z+s-t, s) = -g(z+s-t-s)g'(z+s-t-s) = -g(z-t)g'(z-t)$$

und man bekommt

$$\begin{aligned} \eta_1(z, t) &= \int_0^t f(z+s-t, s) ds = \int_0^t (-g(z-t)g'(z-t)) ds \\ &= -g(z-t)g'(z-t)t = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} (g(z-t)^2) \cdot t. \end{aligned}$$

Analog erhält man für  $\eta_2$

$$(\eta_2)_t + (\eta_2)_z = -\eta_0(\eta_1)_z - \eta_1(\eta_0)_z = -(\eta_0\eta_1)_z. \quad (5.26)$$

Hier hat man also

$$f(z, t) = -(\eta_0\eta_1)_z(z-t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ g(z-t) \frac{d}{dz} (g(z-t)^2) \cdot t \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[ g(z-t) \frac{d}{dz} (g(z-t)^2) \right] \cdot t$$

und somit

$$f(z+s-t, t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[ g(z-t) \frac{d}{dz} (g(z-t)^2) \right] \cdot s.$$

Letztendlich ergibt sich

$$\eta_2(z, t) = \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \left[ g(z-t) \frac{d}{dz} (g(z-t)^2) \right] \cdot t^2.$$

Damit haben wir eine approximative Lösung der Aufgabe (5.5) – (5.7) bis zur zweiten Ordnung gefunden:

$$\eta(z, t) = g(z-t) - \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (g(z-t)^2) \cdot t + \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \left[ g(z-t) \frac{d}{dz} (g(z-t)^2) \right] \cdot t^2 + O(\varepsilon^3).$$

Betrachten wir nun eine einfache Anfangsstörung der Form

$$g(z) = \cos z.$$

Dann lautet die Lösung der Aufgabe (5.5) – (5.7) bis zur ersten Ordnung

$$\eta(z, t) = \cos(z-t) + \varepsilon \cos(z-t) \sin(z-t)^2 \cdot t + O(\varepsilon^2). \quad (5.27)$$

Hierin erkennt man eine Schwäche der regulären Störungstheorie. Der Ansatz (5.18) beinhaltet nämlich, dass die Funktionen  $\eta_k$ ,  $k \geq 0$ , alle von derselben Größenordnung sind (bzgl. jeweils  $\eta_k \gg \varepsilon \eta_{k+1}$ ), damit man bei späteren Sortieren nach Termen in gleicher Ordnung von  $\varepsilon$  tatsächlich in etwa gleichgroße Terme zusammenfasst. Ist jedoch  $t$  von der Größenordnung  $O(1/\varepsilon)$ , haben die beiden ersten Summanden in (5.27) aufgrund des Faktors  $\varepsilon t$  dieselbe Größenordnung. Andersherum bedeutet dies, dass die Darstellung (5.27) ab Zeiten  $t \sim 1/\varepsilon$  nicht mehr gültig ist. Daher ist eine Aussage über die Stabilität mit dieser Methode ab  $t \sim 1/\varepsilon$  nicht möglich.

Als Ergebnis bis hierhin lässt sich aus (5.20) jedoch schon einmal festhalten, dass für eine wellenförmige Anfangsstörung  $g(z) = \cos(kz + \phi)$  die Lösung  $\eta_0$  ihre Amplitude beibehält, also so genannt neutral stabil ist. Also ist  $h$  linear (neutral) stabil.

**Multiskalenanalyse - Nichtlineare Stabilitätsanalyse:** Eine übliche Vorgehensweise zur Vermeidung des obigen Problems für größere Zeiten ist die Verwendung der Multiskalenanalyse anstatt der regulären Störungstheorie. Dabei versucht man die Lösung nicht bezüglich der in der Gleichung vorkommenden Argumente (hier also  $z$  und  $t$ ) sondern bezüglich einer oder mehrerer neuer Orts- und Zeitvariablen (d.h. in anderen Skalen oder auch Koordinaten) darzustellen. Da diese Skalen nicht a priori bekannt sind, macht man auch hierfür einen Störungsansatz, d.h. wir arbeiten fortan auf den Skalen  $\tilde{z}$  und  $\tilde{t}$  und machen den allgemeinen Ansatz

$$\tilde{z} := (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)z, \quad \tilde{t} := (1 + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \dots)t \quad (5.28)$$



mit noch zu bestimmenden Koeffizienten  $\omega_k, \mu_k, k \geq 1$ . Damit wird die AWA (5.17) für den Verlauf einer Störung zu

$$(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)\eta_{\tilde{r}} + (1 + \eta)(1 + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \dots)\eta_{\tilde{z}} = 0, \quad \eta(\tilde{z}, 0) = g(\tilde{z}) = \cos \tilde{z},$$

wobei wir wie oben die Anfangsverteilung  $g(z) = \cos z$  gewählt haben. Nun führen wir für die Lösung  $\eta$  einen Störungsansatz

$$\eta(z, t, \varepsilon) = \eta_0(\tilde{z}, \tilde{t}) + \varepsilon\eta_1(\tilde{z}, \tilde{t}) + \varepsilon^2\eta_2(\tilde{z}, \tilde{t}) + \dots$$

mit Funktionen  $\eta_k = \eta_k(\tilde{z}, \tilde{t})$  in den neuen Skalen  $\tilde{z}$  und  $\tilde{t}$  durch. Einsetzen und Sortieren nach Termen mit gleicher Ordnung in  $\varepsilon$  ergibt in der Ordnung  $\varepsilon^0$  die AWA

$$(\eta_0)_{\tilde{r}} + (\eta_0)_{\tilde{z}} = 0, \quad \eta_0(\tilde{z}, 0) = \cos \tilde{z}$$

mit der eindeutigen Lösung

$$\eta_0(\tilde{z}, \tilde{t}) = g(\tilde{z} - \tilde{t}).$$

Damit lautet die AWA für  $\eta_1$

$$(\eta_1)_{\tilde{r}} + (\eta_1)_{\tilde{z}} = -\omega_1(\eta_0)_{\tilde{r}} - \mu_1(\eta_0)_{\tilde{z}} - (\eta_0)(\eta_0)_{\tilde{z}} = -(\omega_1 - \mu_1) \sin(\tilde{z} - \tilde{t}) + \frac{1}{2} \sin[2(\tilde{z} - \tilde{t})], \quad \eta_1(\tilde{z}, 0) = 0.$$

An dieser Stelle sind nun üblicherweise  $\omega_1$  und  $\mu_1$  so zu bestimmen, dass in der Lösung für  $\eta_1$  die bei der regulären Störungsanalyse "störenden" (genannt sekularen) Terme  $\varepsilon t$  nicht mehr vorkommen.

Wir merken an, dass man wie folgt vorgehen kann. Man wählt  $\omega_1$  und  $\mu_1$ , so dass "Terme mit einer schon in  $\eta_0$  auftretenden Frequenz" nicht mehr auf der rechten Seite vorkommen. Dies ist dann die so genannte Sekularbedingung. Beispiele für diese Vorgehensweise findet man z.B. in Chow [2] und Kevorkian/Cole [4]. Wir werden jedoch hier zunächst  $\eta_1$  bzgl. allgemeiner  $\omega_1$  und  $\mu_1$  ausrechnen und dann deren Wahl diskutieren.

Die Lösung für obige AWA lautet

$$\eta_1(\tilde{z}, \tilde{t}) = \left( -(\omega_1 - \mu_1) \sin(\tilde{z} - \tilde{t}) + \frac{1}{2} \sin[2(\tilde{z} - \tilde{t})] \right) \tilde{t},$$

denn man rechnet schnell nach:

$$\begin{aligned} (\eta_1)_{\tilde{r}} + (\eta_1)_{\tilde{z}} &= ((\omega_1 - \mu_1) \cos(\tilde{z} - \tilde{t}) - \cos[2(\tilde{z} - \tilde{t})]) \tilde{t} - (\omega_1 - \mu_1) \sin(\tilde{z} - \tilde{t}) + \frac{1}{2} \sin[2(\tilde{z} - \tilde{t})] \\ &\quad + (-(\omega_1 - \mu_1) \cos(\tilde{z} - \tilde{t}) + \cos[2(\tilde{z} - \tilde{t})]) \tilde{t} \\ &= -(\omega_1 - \mu_1) \sin(\tilde{z} - \tilde{t}) + \frac{1}{2} \sin[2(\tilde{z} - \tilde{t})], \\ \eta_1(\tilde{z}, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Nun sieht man, dass bei beliebiger Wahl von  $\omega_1$  und  $\mu_1$  die Funktion  $\eta_1$  stets linear in  $\tilde{t}$  (und damit in  $t$ ) ist, d.h. auch hier ist ab  $t \sim 1/\varepsilon$  die implizite Voraussetzung  $\eta_1 \ll \eta_0$  verletzt. Daher ist auch mit dieser Methode keine für alle Zeitpunkte gültige Darstellung von  $\eta$  zu finden. Deswegen sind auch so keine Stabilitätsaussagen möglich. Man beachte, dass sich für  $\omega_1 = \mu_1$  dasselbe  $\eta_1$  wie im regulären Fall ergibt. Dies passt damit zusammen, dass bis zur ersten Ordnung dann auch  $t = \tilde{t}$  und  $z = \tilde{z}$  gilt.

Eine Begründung, warum die Multiskalenanalyse hier nicht zum Ziel führt, liegt in der Tatsache, dass ab  $t = 1/\varepsilon$  Unstetigkeitsstellen in  $h$  und damit in  $\eta$  (weil  $h_s$  stetig ist) auftreten und daher die Voraussetzungen zur Anwendbarkeit der Störungstheorie verletzt sind. Es gibt Möglichkeiten, die Gleichung auch 'hinter' den Unstetigkeitsstellen zu lösen (dort ist die Gleichung dann nur noch im schwachen Sinne erfüllt), z.B. mit der Cole-Hopf-Transformation. Wir verfolgen nun jedoch einen anderen Ansatz.

Wir wollen zu dem Verfahren noch anmerken, dass man (5.28) auch so verstehen kann, dass im Problem nicht nur Effekte auf den „normalen“ Ort- bzw. Zeitskalen  $z$  und  $t$  sondern auch auf anderen, „langsameren“ Ort- und Zeitskalen vorkommen. Formal kann man daher bei der Multiskalenanalyse auch so vorgehen, dass man die Gleichung nicht bzgl. einer einzigen neuen Variable  $\tilde{z}$  bzw.  $\tilde{t}$  betrachtet sondern zusätzliche neue Variablen  $z_j$  und  $t_j$  für  $j = 1, 2, \dots$  einführt. Man betrachtet dann eine neue Zustandsgröße in den alten und neuen Variablen, hier

$$\tilde{\eta}(z, z_1, z_2, \dots, t, t_1, t_2, \dots).$$

Der Zusammenhang dieser neuen Zustandsgröße mit der alten Zustandsgröße  $\eta(z, t)$  ist gegeben durch

$$\tilde{\eta}(z, z_1(z), z_2(z), \dots, t, t_1(t), t_2(t), \dots) = \eta(z, t)$$

mit  $z_j = z_j(z) = \varepsilon^j z$  bzw.  $t_j = t_j(t) = \varepsilon^j t$ . Damit gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots \right) \tilde{\eta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \eta = \left( \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots \right) \tilde{\eta}.$$

Oft lässt man die  $\sim$  über der neuen Zustandsgröße weg, d.h. die Ableitungsoperatoren ändern sich wie folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial z} \mapsto \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots$$

usw. Die Rechnungen laufen leicht anders ab, führen aber zum selben Ergebnis.

### 5.2.2 Modell mit Krümmung

Wir werden das Modell unter Berücksichtigung der Krümmung untersuchen. Der Vorteil gegenüber dem Modell ohne Krümmung liegt darin, dass keine Unstetigkeitsstellen auftreten und eine Multiskalenanalyse kann durchgeführt werden. Daraus kann man Aussagen über die (auch nichtlineare) Stabilität des Systems gewinnen. Wir untersuchen die folgende AWA für  $h = h(z, t)$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial z} + \gamma h^3 \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} + 3\gamma h^2 \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} = 0, \quad h(z, 0) = h_a(z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (5.29)$$

wobei  $\gamma = \alpha W/3$  den Einfluss der Krümmung beschreibt.

**Entwicklung um den stationären Zustand:** Die stationäre Lösung  $h_s$  ist wie oben  $h_s = \text{konstant}$ . Wir betrachten wieder  $h_s = 1$  und schreiben  $h(z, t) = h_s + \varepsilon \eta(z, t) = 1 + \varepsilon \eta(z, t)$ . Die Gleichung (5.5) – (5.7) für den Verlauf der Störung  $\eta = \eta(z, t)$  ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} A(h) &= h, \quad C(h) = \gamma h^3, \quad E(h) = 3\gamma h^2, \quad F(h) = 0, \\ a_0 &= a_2 = a_3 = a_4 = 0, \quad a_1 = 1, \quad f_0 = \dots = f_5 = 0, \\ \tilde{A}(h_s, \eta, \varepsilon) &= \eta, \quad \tilde{C}(h_s, \eta, \varepsilon) = \gamma(3\eta + 3\varepsilon\eta^2 + \varepsilon^2\eta^3), \quad \tilde{E}(h_s, \eta, \varepsilon) = 3\gamma(2\eta + \varepsilon\eta^2), \quad \tilde{F}(h_s, \eta, \varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

zu

$$\eta_t + [1 + \varepsilon\eta] \eta_z + \gamma [1 + \varepsilon(3\eta + 3\varepsilon\eta^2 + \varepsilon^2\eta^3)] \eta_{zzzz} + 3\varepsilon\gamma [1 + \varepsilon(2\eta + \varepsilon\eta^2)] \eta_z \eta_{zzz} = 0, \quad (5.30)$$

$$\eta(z, 0) = g(z), \quad (5.31)$$

wobei  $g$  wieder eine Anfangsverteilung für die Störung ist, z.B.  $g(z) = \cos(kz + \phi)$ .

**Reguläre Störungstheorie - Lineare Stabilitätsanalyse:** Wir beginnen mit einer linearen Stabilitätsanalyse. Durch die Entwicklung um den stationären Zustand haben wir bereits den ersten Schritt der Methode der regulären Störungsanalyse gemacht. Wir betrachten nun nur die Terme in der Ordnung  $\varepsilon^0$  und erhalten:

$$\eta_t + \eta_z + \gamma \eta_{zzzz} = 0.$$

Die allgemeine Lösung hierfür ist

$$\eta(z, t) = a \exp[-\gamma t + i(z - t)] + \text{c. c.}$$

mit  $a \in \mathbb{C}$ , wobei c. c. den komplex konjugierten Teil des vorigen Summanden bezeichnet. Wegen  $\gamma > 0$  liegt in diesem Fall lineare Stabilität vor.

**Multiskalenanalyse - Nichtlineare Stabilitätsanalyse:** Für eine nichtlineare Stabilitätsanalyse gehen wir wie folgt vor. Wir betrachten zwei weitere Zeit- und eine weitere Raumskala, d.h.

$$t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \quad z_1 = \varepsilon z.$$

Dadurch ändern sich die partiellen Ableitungen zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \mapsto \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z_1}.$$

Nun entwickeln wir  $\eta$  wie in (5.8) zu

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots$$

Einsetzen in (5.30) ergibt

$$(L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2) (\eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2) = -\varepsilon N_1 - \varepsilon^2 N_2 \quad (5.32)$$

mit den Operatoren  $L_0, L_1, L_2$  sowie den Termen  $N_1, N_2$ , definiert durch

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^4}{\partial z^4}, \quad L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial z_1} + 4\gamma \frac{\partial^3}{\partial z^3} \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + 6\gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}, \\ N_1 &= \eta_0 (\eta_0)_z + 3\gamma (\eta_0 (\eta_0)_{zzzz} + (\eta_0)_z (\eta_0)_{zzz}), \\ N_2 &= \eta_0 (\eta_1)_z + (\eta_0)_z \eta_1 + \eta_0 (\eta_0)_{z_1} \\ &\quad + 3\gamma (\eta_0 (\eta_1)_{zzzz} + 4\eta_0 (\eta_0)_{zzzz_1} + (\eta_0)_{zzzz} \eta_1 + (\eta_0)_z (\eta_1)_{zzz} + 3(\eta_0)_z (\eta_0)_{zzz_1} \\ &\quad + (\eta_0)_{zzz} (\eta_1)_z + (\eta_0)_{zzz} (\eta_0)_{z_1} + \eta_0^2 (\eta_0)_{zzzz} + 2\eta_0 (\eta_0)_z (\eta_0)_{zzz}). \end{aligned}$$

Wir benutzen nun eine Technik aus Cheng [1] und schreiben

$$L_0 = \tilde{L}_0 + \varepsilon^2 \bar{L}_0, \quad \tilde{L}_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{L}_0 = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4}.$$

Dadurch taucht die Störungsamplitude  $\varepsilon$  beim Ausmultiplizieren von (5.32) und Sortieren nach Termen in gleicher Ordnung bzgl.  $\varepsilon$  explizit in den Termen zweiter Ordnung auf, vgl. (5.35). Dieses Vorgehen ist dadurch zu begründen, dass wir kleine Oberflächenspannungen untersuchen, d.h.  $\gamma \partial^4 / \partial z^4$  ist sehr klein, z.B. von der Ordnung  $O(\varepsilon^2)$ , vgl. [1]. Damit erhalten wir

$$(\tilde{L}_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 (\bar{L}_0 + L_2)) (\eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2) = -\varepsilon N_1 - \varepsilon^2 N_2. \quad (5.33)$$

Sortieren der Terme in der Ordnung  $\varepsilon^0$  ergibt

$$\tilde{L}_0 \eta_0 = 0.$$

Dies ist eine homogene Transportgleichung für  $\eta_0$  bzgl.  $t$  und  $z$  mit der allgemeinen Lösung

$$\eta_0 = \eta_0(z, z_1, t, t_1, t_2) = a(z_1, t_1, t_2) \exp[i(z - t)] + \text{c. c.},$$

wobei die Funktion  $a = a(z_1, t_1, t_2)$  noch unbestimmt ist. Es liegt also lineare (neutrale) Stabilität vor, jedoch kann sich durch die langsamen Orts- und Zeitvariablen  $z_1, t_1, t_2$  das Verhalten ändern. Mit der verkürzten Schreibweise  $u = \exp[i(z - t)]$ , d.h.  $\eta_0 = au + \bar{a}\bar{u}$  ergibt Sortieren der Terme in  $\varepsilon^1$  eine inhomogene Transportgleichung für  $\eta_1$  der Form

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0 \eta_1 &= -L_1 \eta_0 - N_1 \\ &= - \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial z_1} \right) (au + \bar{a}\bar{u}) - 4\gamma i \frac{\partial}{\partial z_1} (au - \bar{a}\bar{u}) \right]}_{=:r_1} - \underbrace{\left[ i (au + \bar{a}\bar{u}) (au - \bar{a}\bar{u}) + 3\gamma ( (au + \bar{a}\bar{u})^2 + (au - \bar{a}\bar{u})^2 ) \right]}_{=:r_2} \end{aligned}$$

mit

$$r_2 = (au)^2 \underbrace{(-i - 6\gamma)}_{=:w} + (\bar{a}\bar{u})^2 \underbrace{(i - 6\gamma)}_{=:w^*} = w(au)^2 + \text{c. c.}$$

In  $r_1$  kommen Terme der Form  $\exp[i(z-t)]$  vor und in  $r_2$  Terme der Form  $\exp[2i(z-t)]$ . Deshalb ergeben sich in der Lösung für  $\eta_0$  die oben schon angesprochene sekularen Terme. Wir verdeutlichen dies an einem Beispiel. Wir betrachten die AWA

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = \sin(n(z-t)), \quad u(z,0) = \sin z, \quad z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (5.34)$$

mit  $n \in \mathbb{N}$ . Es ergibt sich die eindeutige Lösung

$$u(z,t) = \sin(z-t) + t \sin(n(z-t)).$$

Für  $n > 0$  stellt  $t \sin(z-t)$  einen sekularen Term dar. Übertragen auf unsere Analyse dürfen solche Terme nicht in  $\eta_1$  vorkommen, da für große  $t = O(1/\varepsilon)$  der Term  $\varepsilon \eta_1$  dieselbe Größenordnung wie  $\eta_0$  hat. Daher ist  $a$  so zu wählen, dass diese Terme nicht auftauchen und man erhält

$$\eta_1 = \eta_1(z, z_1, t, t_1, t_2) = e a(z_1, t_1, t_2)^2 \exp[2i(z-t)] + \text{c. c.}, \quad e = \frac{w}{16\gamma} = -\frac{3}{9} - i \frac{1}{16\gamma} = e_r + i e_i.$$

Sortieren der Terme in  $\varepsilon^2$  ergibt

$$\tilde{L}_0 \eta_2 = -L_1 \eta_1 - (\tilde{L}_0 + L_2) \eta_0 - N_3 = -L_1 \eta_1 - (\varepsilon^{-2} L_0 + L_2) \eta_0 - N_3. \quad (5.35)$$

Auch hier ergeben sich sekulare Terme. Damit diese verschwinden, muss  $a$  die Bedingung

$$\frac{\partial a}{\partial t_2} - 6\gamma \frac{\partial^2 a}{\partial z_1^2} + \varepsilon^{-2} \gamma + (E_1 + iF_1) a^2 \bar{a} = 0 \quad (5.36)$$

mit

$$E_1 = -\frac{39}{8} \gamma + \frac{1}{16\gamma}, \quad F_1 = \frac{15}{8}$$

erfüllen. Diese Gleichung nennt man auch *Ginzburg-Landau-Gleichung*. Unter der Annahme, dass der Diffusionsterm in (5.36) vernachlässigt werden kann, wird (5.36) zu einer gewöhnlichen komplexen Differentialgleichung in der Variable  $t_2$ . Mit dem Ansatz

$$a(t_2) = a_0(t_2) \exp[-ib(t_2)t_2], \quad a_0(t_2), b(t_2) \in \mathbb{R},$$

ergibt sich ein System aus zwei gewöhnlichen reellen Differentialgleichungen für  $a_0$  und  $b$  bzgl.  $t_2$  der Form

$$\frac{\partial a_0}{\partial t_2} = (-\varepsilon^{-2} \gamma - E_1 a_0^2) a_0, \quad \frac{\partial (b(t_2)t_2)}{\partial t_2} = F_1 a_0^2. \quad (5.37)$$

Durch die nichtlineare Struktur der Gleichung, kann trotz der oben gezeigten linearen Stabilität eine so genannte *subkritische Instabilität* auftreten, wenn

$$E_1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16\gamma} > \frac{39}{8} \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} > \sqrt{78} \Leftrightarrow \lambda > \sqrt{78} h_0.$$

Denn gilt

$$\varepsilon a_0 > A_t := \sqrt{\frac{\gamma}{E_1}}$$

mit der *threshold Amplitude*  $A_t$ , dann wachsen laut (5.37)  $a_0$  und damit  $a$  und auch  $\eta_0$  an. D.h. die Lösung für  $h$  ist instabil. Im Falle  $\varepsilon a_0 < A_t$  streben  $a_0$ ,  $a$  und  $\eta_0$  gegen 0, d.h. die Lösung für  $h$  ist stabil.

### 5.3 Schmelzströmung

Wir betrachten nun den Fall, dass durch die Schmelzfront Material mit zur Vereinfachung konstanter Geschwindigkeit  $v_p = 1$  einströmt.

### 5.3.1 Modell ohne Krümmung

Hier gilt im Fall von konstanten  $\tau_g = p_g = 1$  mit der Normierung  $Re = 1$  ohne Krümmung, also  $W = 0$ , dass

$$A(h) = h, \quad F(h) = -1.$$

Somit lautet die Anfangs-Randwertaufgabe (ARWA)

$$h_t + hh_z = 1, \quad h(z, 0) = h_a(z), \quad h(0, t) = 0, \quad z \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (5.38)$$

Die stationäre Lösung  $h_s = h_s(z)$  hierzu ist wegen der Voraussetzung  $h_s(0) = 0$  (d.h. die Schmelzfilmdicke soll am oberen Rand des Gebietes verschwinden)

$$h_s(z) = \sqrt{2z}.$$

Zur Störungsanalyse betrachten wir daher

$$h_a(z) = \sqrt{2z} + \varepsilon g(z)$$

mit  $g$  aus (5.11).

**Methode der Charakteristiken:** Zu untersuchen ist die ARWA

$$h_t + hh_z = 1, \quad h(z, 0) = h_a(z) = \sqrt{2z} + \varepsilon g(z), \quad h(0, t) = 0, \quad z \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (5.39)$$

Wir benutzen wieder die Methode der Charakteristiken, um die Lösung genauer zu analysieren. Dazu betrachten wir zunächst die Charakteristiken, die von der  $(t = 0)$ -Halbachse losgehen. Wir definieren dafür  $y(t) := h(z(t), t)$ . Dann gilt

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}y = h_z \dot{z} + h_t.$$

Durch Vergleich mit (5.39) sieht man, dass man eine Lösung für (5.39) gefunden hat, wenn man folgendes System gelöst hat:

$$\dot{y}(t) = 1, \quad y(0) = h_a(z_0), \quad (5.40)$$

$$\dot{z}(t) = y(t), \quad z(0) = z_0, \quad (5.41)$$

wobei der Anfangswert  $z_0$  später diskutiert wird. Dies ist ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangswerten. Die Lösung für (5.40) mit beliebigem  $z_0$  ist gegeben durch

$$y(t) = h_a(z_0) + t,$$

woraus wir die Lösung

$$z(t) = z(t, z_0) = z_0 + h_a(z_0)t + \frac{1}{2}t^2$$

für (5.41) bestimmen. Die Lösung für (5.39) lässt sich durch Elimination von  $z_0$  implizit angeben als

$$h(z, t) = h_a \left( z + \frac{1}{2}t^2 - h(z, t)t \right) + t. \quad (5.42)$$

Die Charakteristiken im  $(z, t)$ -Koordinatensystem sind in diesem Fall Wurzeläste mit Scheitelpunkt in  $t = -h_a(z_0)$ ,  $z = z_0 - 1/2h_a(z_0)^2$ . Insbesondere ergibt sich der Wurzelast  $t = \sqrt{2z}$  ausgehend von  $z = t = 0$ .

Die Charakteristiken, die von der  $(z = 0)$ -Achse ausgehen, können berechnet werden, indem man die Rollen von  $z$  und  $t$  vertauscht und ähnlich wie oben vorgeht. Wir definieren  $y(z) := h(z, t(z))$  und sehen dann, dass die Charakteristiken die Form

$$z(t) = z(t, t_0) = \frac{1}{2}(t - t_0)^2$$

besitzen. Entlang dieser Charakteristiken verschwindet die Lösung aufgrund der Randbedingung  $h(0, t) = 0$ , d.h. oberhalb des Wurzelastes  $t = \sqrt{2z}$  gilt  $h \equiv 0$ . Störungen werden also automatisch ab  $t = \sqrt{2z}$  verschwunden sein. Sie laufen nach rechts heraus. Wir sind in der Störungsanalyse daher nicht am Langzeitlimit interessiert sondern am Verhalten kurzzeitig auftretender Störungen.

Für Schnittpunkte der (von  $z_0 \geq 0$  ausgehenden) Charakteristiken suchen wir wieder Lösungen von  $z(t, z_0) = z(t, z_1)$ , d.h.

$$h_a(z_0)t + z_0 = h_a(z_1)t + z_1.$$

Für  $\varepsilon = 0$  (d.h. im stationären Fall) und  $z_0 \neq z_1$  ergeben sich diesmal zwar Schnittpunkte, diese liegen jedoch bei

$$t = -\frac{\sqrt{z_0} + \sqrt{z_1}}{\sqrt{2}} < 0$$

und müssen daher nicht betrachtet werden. D.h. im stationären Fall treten keine Unstetigkeiten auf. Für  $\varepsilon \neq 0$  erhalten wir den Schnittpunkt

$$t = -\frac{z_0 - z_1}{\sqrt{2}(\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1}) + \varepsilon(g(z_0) - g(z_1))} =: t_s(z_0, z_1).$$

Ein Schnittpunkt zu kleinen Zeiten tritt wieder für  $z_1$  nahe  $z_0$  auf, d.h. wir betrachten wiederum den Limes

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_0} t_s(z_0, z_1) = -\frac{\sqrt{2z_0}}{1 - \varepsilon k \sqrt{2z_0} \sin(kz_0 + \phi)}.$$

Wegen  $\sqrt{2z_0} = O(1)$  ist  $t_s < 0$ , da sowohl Zähler als auch Nenner positiv sind (denn  $|\varepsilon k \sqrt{2z_0} \sin(kz_0 + \phi)| \ll 1$ ). Charakteristiken schneiden sich also auch im gestörten Fall nicht. Man beachte jedoch, dass wir aus formalen Gründen das Berechnungsgebiet auf  $[z, \infty)$  erweitert haben. Hier können sehr wohl Schnittpunkte auftreten. Denn für große  $z_0$  ist  $|\varepsilon k \sqrt{2z_0} \sin(kz_0 + \phi)| \gg 1$  und daher  $t_s = O(1/\varepsilon)$ . Obige Lösung aus (5.16) ist daher auch nur bis zu diesen Schnittpunkten gültig.

**Entwicklung um den stationären Zustand:** Wir entwickeln die Lösung um die stationäre Lösung  $h_s(z) = \sqrt{2z}$ . Die ARWA (5.5) – (5.7) für den Verlauf der Störung ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} A(h) &= h, & F(h) &= -1, \\ a_0 &= a_2 = a_3 = a_4 = 0, & a_1 &= 1, & f_0 &= -1, & f_1 &= \dots = f_5 = 0, \\ \tilde{A}(h_s, \eta, \varepsilon) &= \eta, & \tilde{F}(h_s, \eta, \varepsilon) &= 0 \end{aligned}$$

zu

$$\eta_t + (\sqrt{2z} + \varepsilon\eta)\eta_z = -\frac{\eta}{\sqrt{2z}}, \quad \eta(z, 0) = g(z), \quad \eta(0, t) = 0, \quad z \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (5.43)$$

wobei  $g$  eine Anfangsverteilung für die Störung ist.

**Reguläre Störungstheorie - Lineare Stabilitätsanalyse:** Wir vernachlässigen die nichtlinearen Terme und erhalten

$$\eta_t + \sqrt{2z}\eta_z = -\frac{\eta}{\sqrt{2z}}, \quad \eta(z, 0) = g(z), \quad \eta(0, t) = 0, \quad z \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (5.44)$$

Beispielsweise mit der Methode der Charakteristiken ergibt sich die Lösung

$$\eta(z, t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{2z}}\right) g\left(\frac{1}{2}(\sqrt{2z} - t)^2\right), & t \leq \sqrt{2z}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.45)$$

Im Bereich  $t \leq \sqrt{2z}$  betrachten wir unter der Annahme einer wellenförmigen Anfangsverteilung  $g$  wieder nur den Vorfaktor von  $g$ . Man sieht, dass die Lösung linear (mit dem Vorfaktor  $-1/\sqrt{2z}$ ) abklingt, bis sie bei  $t = \sqrt{2z}$  verschwindet. Für diesen Bereich hat man also eine lineare Stabilität. Für hohe Zeiten  $t \geq \sqrt{2z}$  gilt sogar  $\eta = 0$ . Daher ist hier eine Untersuchung für große Zeiten nicht mehr notwendig.

### 5.3.2 Modell mit Krümmung

Zieht man auch die Oberflächenspannung in Betracht, ergibt sich die ARWA

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (h - \alpha h^2) \frac{\partial h}{\partial z} + \alpha \frac{W}{3} h^3 \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} + \alpha W h^2 \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} = 1 \quad h(z, 0) = h_a(z), \quad h(0, t) = 0, \quad z \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (5.46)$$

für  $h = h(z, t)$ . Für diese Aufgabe sind bisher weder Existenz- noch Eindeutigkeitsaussagen bekannt. Auch eine stationäre Lösung konnte noch nicht gefunden werden. Dies ist Bestandteil aktueller und zukünftiger Forschungen.

## 6 Ergebnisse

In dieser Arbeit wurde ein Modell zur Beschreibung eines Schneidprozesses mit Laserstrahlung entwickelt. Es ergibt sich eine Anfangs-Randwert-Aufgabe mit einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung für den Verlauf der Schmelzfilmdicke. Unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung treten dabei räumliche Ableitungen in bis zu vierter Ordnung auf. Der obere und untere Teil des Berechnungsgebietes wurde einzeln betrachtet.

Für den oberen Bereich wurde dabei die Analyse unter Vernachlässigung der Krümmung durchgeführt. Es wurde gezeigt, dass Störungen, die an einer Stelle  $z$  auf der Schmelzfront im oberen Bereich auftauchen, nach einer Zeit  $t = \sqrt{2z}$  verschwunden sind, wobei die Störung auf lineare Weise abklingt.

Im unteren Bereich haben wir gezeigt, dass unter Vernachlässigung der Krümmung der Prozess linear neutral stabil ist, d.h. Störungen werden ohne Amplitudenänderung weiter transportiert. Betrachtet man zusätzlich auch die Krümmung, ist der Prozess sogar linear stabil, d.h. Störungen klingen in erster Ordnung exponentiell ab. Mit Hilfe der Multiskalenanalyse ergibt sich jedoch, dass es Wellenlängen gibt, für die eine subkritische Instabilität vorliegen kann. Besitzt die Störung für solche Wellenlängen eine genügend hohe Anfangsamplitude, dann wächst die Amplitude auf einer langsamen Zeitskala exponentiell an und der Prozess ist nichtlinear instabil.

## 7 Planung

Zum Einen muss im oberen Bereich die Aufgabe unter Berücksichtigung der Krümmung bearbeitet werden. Hier muss zunächst eine stationäre Lösung gefunden werden, um damit eine nichtlineare Stabilitätsanalyse mit Hilfe der Multiskalenmethode durchzuführen.

Weiterhin gilt es zu beachten, dass die Funktionen  $\tau_g$ ,  $p_g$  und  $v_p$  bisher als vom Prozess unabhängige Größen betrachtet wurden. Es muss untersucht werden, ob Wechselwirkungen mit dem Prozess auftreten, d.h. ob  $\tau_g$ ,  $p_g$  und  $v_p$  Funktionen von  $h$  bzw. dessen Ableitungen sind. Als erster Ansatz wurde dies für die die Einströmgeschwindigkeit  $v_p$  bereits gemacht und daraus ein Modell entwickelt, das auch eine Bewegungsgleichung für den Verlauf der Schmelzfront im laserstrahlfesten Bezugssystem beinhaltet. Dieses Modell wird zur Zeit auf Stabilität untersucht.

## Literatur

1. P.J. Cheng, C.K. Chen, H.Y. Lai (2001): Nonlinear stability analysis of thin viscoelastic film flow traveling down along a vertical cylinder. *Nonlinear Dynamics* 24:305-332.
2. C. C. Chow (2007): Multiple scale analysis. *Scholarpedia*, 2(10):1617.  
Online: [http://www.scholarpedia.org/article/Multiple\\_scale\\_analysis](http://www.scholarpedia.org/article/Multiple_scale_analysis)
3. Chen-I Hung, Jung-Shun Tsai, and Cha'o-Kuang Chen (1996): Nonlinear Stability of the Thin Micro-polar Liquid Film Flowing Down on a Vertical Plate. *J. Fluids Eng.* 118(3):498-505.
4. J. Kevorkian, J.D. Cole (1996): *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*. Applied Mathematical Sciences, Springer, New York et al.